m —





Imprimatur,

Edmundo Boldero PROCANCELLARIO.
Pet. Gunning Præfect. Coll. S. *Joban.*
Jo. Pearson Mag. Coll. S. *Trin.*

Martii 22. 166⅘.



LECTIONES
OPTICÆ & GEOMETRICÆ:

In quibus

PHÆNOMENΩN OPTICORUM

Genuinæ *Rationes* investigantur, ac exponuntur:

ET

Generalia Curvarum Linearum *Symptomata declarantur.*

Auctore ISAACO BARROW,

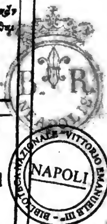
Collegii *SS. Trinitatis* in Academia *Cantab.* Præfecto,
Et *SOCIETATIS REGIÆ* Sodale.

Οἱ φύσει λογιστικοὶ εἰς πάντα τὰ μαθήματα, ὡς ἔπος εἰπεῖν, ὀξεῖς φαίνονται· οἵ τε βραδεῖς, ἂν ἐν τούτῳ παιδευθῶσι ϗ γυμνάσωνται, κἂν μηδὲν ἄλλο ὠφεληθῶσιν, ὅμως εἴς γε τὸ ὀξύτεροι αὐτοὶ αὑτῶν γίγνεσθαι πάντες ἐπιδιδόασιν. Plato de Repub.

Ἀρχεῖ, εἰ τὰ μὲν οὐ χεῖρον. Arist.

LONDINI,

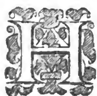
Typis *Guilielmi Godbid*, & prostant venales apud
Robertum Scott, in vico Little-Britain. 1674.



SPECTATISSIMIS VIRIS

ROBERTO RAWORTH & THOMÆ BUCK

ARMIGERIS;

AS, à VENERABILI VIRO *HENRICO LUCAS* institutæ atque dotatæ, ab ipsis verò optimâ fide, summâque prudentiâ administratæ & constitutæ in ACADEMIA CANTABRIGIENSI, PROFESSIONIS MATHEMATICÆ primitias, gratitudinis ac observantiæ ergò, devovet

Isaac Barrow.

Epistola ad LECTOREM.

Benigne Lector,

Minimè tibi destinatum hoc quicquid est opellæ, statim ipse, modò digneris inspicere, multis ab indiciis deprehendes; nec tamen ut juris id tui fieret, defuerunt auctores. quibus tandem, animo certè trepidans atque renitens, idcircò præsertim obsequutus sum, quoniam in hoc, quod ipse primus obierim, munus successuris exemplo præire rem literariam; si minùs effectu, saltem conatu promovendi, non inhonesta, nec ab officio meo aliena videbatur ambitio. accessit tenuis spes inesse bonæ frugis non-nihil, quod & aliquatenus tibi prosit, nec omnino displiceat. Memineris autem obtestor qui in his literis provectior es, quale scriptum attrectas; non utique tibi soli elaboratum; non sponte productum; non diuturnâ meditatione subactos exhibens feriantis ingenii conceptus; at Lectiones Scholasticas; *primùm officii necessitate expressas; tum subinde properantiùs effusas, ut absolveretur pensum, ac hora deflueret; demùm ad promiscui literarii populi instructionem comparatas, cujus intererat complura (qualia tibi videbuntur) leviora non prætermitti; ut frustrà futurus sis (id quod te monitum oportuit, nè multùm expectando tibi pariter obsis, ac mihi) accuratum hìc quicquam, affabrè positum, aut concinnè digestum sperans. Enimverò, quò tibi satisfacerem, expediret scio multa detruncare, meliora substituere, pleraque transponere, omnia ad incudem limámque revocare; quæ tamen adniti, nec stomachi mei, nec otii fuit; sed nec facultatis exequi. in puris itaque naturalibus (quod aiunt) & prout nata sunt emittere malui; quàm operosè lambendo aliam in formam, nec ipsam placituram refingere. quinimò postquam edendi propositum inii, seu fastidio correptus seu novandi subiturum studium fugitans, nè quidem horum magnam partem relegere sustinui; verùm, quod tenellæ matres facti-*

factitant, *à me depulſum partum amicorum haud recuſantium nutriciæ curæ commiſi, prout ipſis viſum eſſet, educandum aut exponendum. quorum unus (ipſos enim honeſtum duco nominatim agnoſcere) D.* Iſaacus Newtonus, *collega noſter (peregregiæ vir indolis ac inſignis peritiæ) exemplar reviſit, aliqua corrigenda monens, ſed & de ſuo nonnulla penu ſuggerens, quæ noſtris alicubi cum laude innexa cernes. alter (quem noſtræ gentis haud immeritò* Merſennum *dixero, cùm ſuâ tum aliorum operâ provehendis hiſce literis natum) D.* Joh. Collinſius, *ingente ſuo cum labore editionem procuravit. Poſſem jam alios expectationi tuæ obices ponere, ſeu veniæ conciliatrices cauſas obtendere (meam ingenii tenuitatem, experimentorum inopiam, alias intercurrentes curas) niſi* Catonis *ſenioris mordaculum illud in me ſubvererer recaſurum:* Rectè ſi Amphictyonum decreto conſtrictus hæc evulgas. *Hujuſmodi ſaltem præloquium partim æquitas exegit, partim in fœtum proprium ϛοϱγὴ quædam elicuit, ut excuſatior is, ac à cenſura munitior prodiret. ſin acrior ſis, nec hæc aure dextrâ admittere velis, pro tuo (per me licet) ingenio facias, quantumvis ſtrenuè reprehendas.*

Epiſtola;

Epistola; in qua Operis hujus Argumentum, & scopus brevitèr exponuntur.

PErcontaris (amice cum primis charissimè) quid in Lectionibus istis jam prælo subditis præstiterim, aut præstare voluerim. responso facilè defungi possem, ea dicendo præstita videri, quæ singularum initia pollicentur, è quibus insequentium methodus, materiâ, scopus constare poterunt ipsâ delibanti. verùm in summam, opinor, ista contrahi vis, & sub unum aspectum redigi. id quidem ægrè possum, nisi (quod juxtà fastidiosum ac longum esset) complura *Theoremata* recitando; sed utcunque morem tibi geram, rerum capita succinctè perstringens. Generatim eò connitor, ut illam, quam tractandam suscipio, *Opticæ* partem aliquatenùs promoveam, ejus imprimìs principia explicando; tum ab ipsis *Utilia Consectaria* deducendo; demùm præcipuos (quos animadverteram) defectus supplendo, nec non *vulgatos errores* corrigendo. huc collimans, speciatim primò receptas hypotheses ad examen revoco, quatenus admittendæ sunt & quomodò rectiùs intelligendæ edocere studens; tum è physicis uerisimilibus causis ipsas eliciens ac astruens. quâ in parte mihi fidei multum attribui nolim; quæ probabiliora mihi visa protuli, neutiquam verò talia, quibus ipse magnoperè confidam. valeant quantum valere possunt. Saltem hypotheses ipsas admitti peto, ceu experientiæ consentaneas, nec à ratione quaquàm abhorrentes. Hypothesibus constitutis, ab iis proximè generalia

quædam *Theoremata* derivo, partim ab aliis agnita (quæ methodi gratiâ, & propter aliorum probationem, meis demonstrationibus firmata appono) partim à me observata. dein ad specialia progredior, id mihi negotii sumens, ut *Catoptricæ*, ac *Dioptricæ* utriusque, in usu maximè positæ (*planæ* scilicet & *Sphæricæ*) potissima pertractem *In Catoptrica Sphærica* (siquidem plana jam olim verè satis, ac fusè exculta habetur) ejusmodi *Theoremata* propono, de quibus reflexorum radiorum intersectiones atque limites innotescunt; unáque punctorum tam à longè, quàm è propinquo radiantium imagines, & apparentes loci determinantur; respectu oculi nedum in radiationis axe, sed extra ipsum ubicunque constituti. quæ certè vel nusquam (quod sciam) aut magnâ ex parte perperàm alibi tractata prostant; id quod, incidentèr aliorum refutans sententias, cùm ratiociniis perspicuis, tum experimentis decretoriis evictum eo. *Dioptricam* porrò tam *planam quàm Sphæricam*, refractionis novissimâ præstratâ lege vel hypothesi (quam *illustris Cartesius* detexit, at plerique, reor, meliores *Optici* jam amplexantur; quam & propter assignatas alicubi rationes veritati consonam judico) velut à fundamentis extruo. nec enim eorum, qui principium illud admiserunt, ipsum hactenus quisquam (in scriptis intelligo quæ viderim luci commendatis) huc applicuit. Hîc autem imprimìs puncta radiantia longè dissita (seu quasi parallelos emittentia radios) considerans, quo pacto ab ipsis profluentes radii detorquentur exquiro, *Theoremata* quædam eliciens, è quibus præcipua *refractorum symptomata* liquent, ipsorum intersectiones ac limites dignoscuntur; apparentia denique punctorum objectorum loca designantur, tam oculi respectu qui in axe, quàm ejus qui uspiam extra axem collocatur. tunc eadem attento quoad puncta sensibiliter vicina, seu divergentibus radiis allucentia. sub extremum, quò paratior sit horum usus,

punctorum

punctorum per omnigenas lentes translucentium imagines singillatim exhibeo determinatas. Hisce qualitercunque confectis, de magnitudinum dijudicandis (istis nempe, quæ hujusmodi consequuntur inflectiones) apparentiis nonnulla generatim attingo; tum posteà specialiùs ac uberiùs planorum objectorum imagines quales sunt, & quomodò designandæ commonstro. ab indè receptui cano. Memoratis autem hisce passim alia πάρεργα interspergo; de quibus tu videris, nam ego malim reticere.



Brevitatis gratiâ notæ quædam adhibentur, quarum hîc subjungitur interpretatio.

$A + B$. *hoc est*	A & B *simul accepta.*
$A - B$.	A, *demptâ* B.
$A -: B$.	*differentia ipsarum* A, & B.
$A \times B$.	A *multiplicata, vel ducta in* B.
$\frac{A}{B}$ —	A *divisa per* B, *vel applicata ad* B.
$A = B$.	A *æquatur ipsi* B.
$A \sqsubset B$.	A *major est quàm* B.
$A \sqsupset B$	A *minor est quam* B.
$A . B :: C . D$	A *ad* B *eandem rationem habet, quam* C *ad* D.
$A, B, C, D \div\div$.	A, B, C, D *sunt continuè proportionales.*
$A . B \sqsubset C . D$.	A *ad* B *majorem rationem habet, quàm* C *ad* D.
$A . B \sqsupset C . D$.	A *ad* B *minorem rationem habet, quàm* C *ad* D.
$A . B + C . D \; = / \sqsubset / \sqsupset \; M . N$	*Rationes* A ad B, & C ad D *compositæ* { *adæquant* / *excedunt* / *deficiunt à* } *ratione* M ad N.
Aq.	*Quadratum ex* A.
$\sqrt{A}$.	*Latus, vel radix quadrata ipsius* A.
Ac.	*Cubus ex* A.
$\sqrt{Aq + Bq}$.	*Latus compositi ex* Aq & Bq.

Reliquas, si quæ occurrunt, abbreviaturas Lector facili conjecturâ capiet, præsertim in analysi tantillùm versatus.

Lect.

Lect. I.

I. PRæfatorio jam vinculo ſolutus, & ſcopulum prætervectus Rhetoricum, ad muneris mei proprium opus accingor. Imprimis autem novi quod inierim conſilii rationem, paucis expediam. Cùm prius inſtitutum urgens adverterim, occurrere pleraque nimiam attentionem deſiderantia, nec ex improviſo auſcultantibus, indè ſatis opportuna; incommodum etiam illud à puram Geometriam attrectantibus haud poſſe declinari; conſtitui, derelictâ tantiſper iſtâ, protinus in amæniores (floribus nempe Phyſicis depictos, & fructibus conſitos Mechanicis) mixtæ quam appellitant Matheſeos Campos deviare; Opticæ nimirum, Mechanicæ, Coſmographiæ, reliquæ cujuſcunque, prout occaſio feret, & commodum videbitur. Neque tamen animus erit ullius ex his longè diffuſa latifundia pervagari, vel extremos fines circumire; ſed ad ejus quaſi metropolim è veſtigio rectà procedere; primas tantum hypotheſes excutere, præcipuáque (quibus illa tam vaſta theorematum moles incumbit) fundamenta denudare; tum verò nonnullâ, palmaria quidem illa, ſtatim emergentia corollaria ſubtexere. Quorum certè σκέψις jucunda præſertim, utilis, & fructuoſa videri poteſt; quum è principiis rectè poſitis, probéque perceptis reliquorum & firma fides, & facilis comprehenſio ſubnaſcantur.

Præceſſerat antiloquium occaſioni, quæ fuit, adaptatum.

II. Ab Optica ſumemus exordium; ſcientia cum primis Nobili; quam cum peculiaris amænitas, tum ingens commendat utilitas. Nam Naturæ ſimul detegendis arcanis, ac explicandis Phænomenis minimè vos latet quantopere conducat; neque minùs ad Aſtronomicas rationes quàm planè neceſſaria ſit; ut Perſpectivam, Picturam, & his agnatas alias eximias Artes taceam, quæ totæ quantæ quantæ ſunt ab ea pendent, ac principia ſua mutuantur. Ut & prætèream qualia, certè vix pretio

ſuo æſtimanda, ad vitæ communis uſum beneficia ſubminiſtret; viſûs imperfectionibus & vitiis tam prompta, quàm certa, minimi ſumptûs, & nullius periculi remedia conferendo. Neque, quum curioſiſſimus iſte ſenſus noſter ità varias indies, ità miras rerum ſpecies exhibeat nobis; non admodum oblectare nos, non eximiâ voluptate mentes noſtras afficere poſſit, unde talis emergat apparentiarum diverſitas, & quis ſit illas attingendi modus nedum accuratè, certóque cognoſcere, ſed utcunque veriſimilitèr arbitrari; præſertim quum in nullâ parte noſtri, nec in tota fortaſſis rerum compage, neceſſitatibus, commodis, & voluptatibus noſtris proſpicientis melioris naturæ ſeu fines agendi, ſeu modos pleniùs queamus perſpicere; nuſquam adeò diſtinctiùs aut apertiùs opificis πανσόφου eluceat artificium. Verùm elogia pertexere non vacat, aut convenit nobis. Rem potiùs ipſam aggrediamur.

III. Quæ circa viſum occupatur diſciplina communiter in tria membra diſpertitur; primum, quod viſus directis radiis objecta cernentis affectiones conſiderat (hoc ſpeciatim Optice nominatur;) alterum, quod è radiorum ab opacis corporibus repercuſſu oriundas ſpeculatur apparentias (cui Catoptricæ nomen inditum;) tertium denique, quod ideò Dioptrica vocitatur, quia cauſas inveſtigat, aut exponit eorum quæ à radiis apparent per diverſa media tranſlucentibus, & eorum occurſu demutatis. Quam diſtributionem ut non improbamus, ità nobis haud obſervandam proponimus; nedum quia multa pariter his communia ſunt, at præcipuè quia viſio quævis, ut libet ſimplex ac directa, ſicuti reverà non abſque nonnulla radiorum inflectione peragitur, ità nec eâ ſecluſâ penitus intelligi poteſt aut explicari. Igitur hujuſmodi methodo potiùs inſiſtendum cenſemus; ut nempe primò viſionis cauſas (quæ ſcilicet illam extrinſecus efficiunt, aut afficiunt) examinemus; tum ut videndi modum (hoc eſt quo pacto ſenſus hic noſter idoneis organis inſtructus iſtis concurrentibus cauſis, objectorum illas, quas experimur, differentias apprehendit) adnitamur exponere; dehinc, ut Phænomena quædam ſelectiora ſuſcipiamus elucidanda, poſtremóque forſan, ut de viſûs remediis ac ſubſidiis aliquid ſubjungamus.

IV. Viſionis cauſas externas quod attinet, nemini jam dubium eſt, exiſtimo, non ullâ (quanquam *Empedocli*, *Platoni*, *Euclidi*, veteribus aliis id placitum erat) ab oculo radiorum emiſſione, verùm ab objectis defluente re quâpiam, oculoſque percellente viſum effici; quod & *Democrito*

Democrito jam olim, ejúſque ſequaci (dicam an ſimio?) ſuboluerat *Epicuro*. Quod ſanè malim adſumere, vel ſupponere, quàm poſt tot alios operoſo niſu comprobare. Certè (quo breviſſimè tangam hanc quæſtionem) ſic in alia qualibet evenit ſenſione, (quidni pariter in viſu?) non ut ſenſus in objecta feratur, ſed ut ipſa ſe ſenſibus imprimant; immediato nempe contactu, vel medii cujuſdam ſeu projecti, ſeu commoti interventu. Tum ratio vetat, ut ex ocello quicquam in immenſam adeò circumquaque diſtantiam credamus emanare; neque quod ſic emanet in eo quidpiam aptum natum deprehendimus. Totus enimverò pellucidis humoribus aut membranulis conſtat opacis, ad tranſmittendam lucem, vel ad eam excipiendam, aptiſſimè, ſed ad progignendam à ſe vel ejaculandam haudquaquam comparatis. Quòd ſi lucem ipſe profunderet, inſitiſque radiis attingeret objecta, quidni denſiſſimis in tenebris hoc præſertim faceret, & feles vel (Hiſtoricis ſi placet) *Tiberii* fieremus omnes? Quæ, dico, lucis externæ tam indiſpenſabilis ad viſum neceſſitas eſſet? συναυγῆας equidem Platonicæ. Sonum audio, vim non capio. Demum ab objectis, etiam à tergo ſitis, circumfuſas ſpecies quas vocant, ad oculos deportari, ſuique perceptionem efficere, cùm à ſpeculis, tum ab aliis innumeris perquam obviis experimentis compertum habetur; illarum igitur efficaciæ quidni commodiſſimè viſionem adſcribamus? ſatis hæc illam quam adſumimus vulgarem jam hypotheſin adſtruunt, quam & totus dicendorum tenor luculentè confirmabit.

V. Cùm verò multa viſum afficiant diverſimode, puta lux, lumen, dies, crepuſculum, colores, rerum imagines, phaſmata; nec tamen abſque luce. (Præſente nimirum aut prævia) quidvis horum aliquid peragat, perſpicuum eſt lucis hic præcipuas partes, primariam efficaciam fore. Quinimo rem ſedulò penſitantes, eo deveniemus, opinor, ut varias his omnibus adnexas apparentias non aliunde quàm ex diverſimodâ lucis unius operatione putemus proficiſci. Cum nempe lux ſit illud quicquid ſit quod à corpore lucido (quale ſtella, ignis, flamma) proveniens immediatè viſum afficit, lumen nil videtur aliud quàm lux in corpuſcula quædam opaca (ſeu lucem non penitus excipientia) τῷ διέχοντι interſperſa impingens, nec non ab iis in omnes undique partes reſiliens; quæ ſcilicet in oculum itineri ſuo expoſitum tumultuariè delapſa confuſam quandam apparentiam excitat; quàm, ſi fortior ſit, eique prorogandæ lucens præſtò ſit, appellamus diem; at ſi debilior fuerit, ejúſque fons abſceſſerit, crepuſculum dicimus. Etiam color nil fermè videtur aliud, quàm lux à corporibus quibus occurrit

 majuſculis

majusculis, & aliquatenus stabilem suarum partium situm retinentibus (pro varia particularum, è quibus illa componuntur, figura, dispositione, textura, hoc vel illo modo) detorta, vel utcunque repercussa; nimirum ut ejusmodi corporibus illapsa lux vel motu suo, vel agendi virtute, vel ipsâ quantitate suâ (quoad raritatem intelligo, vel densitatem; radiorum copiam, aut paucitatem) talis evadat, & pro modi discrimine dispares procreet apparentias, à quibus eam variis colorum nominibus insignimus. Imagines autem nil planè sunt aliud, quum lux ab objectis ita reflexa, vel refracta, ut rursus in unum locum, talémque recolligatur situm, qualem tunc obtinuit, quum ab originali profflueret objecto; directóque versus oculum itinere procederet; quo fit ut similiter objecta, sed tanquam alibi collocata repræsentent. Phasmata denique sunt imaginum quasi colores, pro lucis diversa media trajicientis alia ac alia quoad motum, vim, quantitatem affectione diversa variati Crassiusculè jam ista proponimus; quorum forsan aliqua saltem in dicendorum progressu magis elucescent.

VI. Cùm itaque lux in visione peragenda, diversisque procreandis apparentiis ità quasi paginam utramque faciat; Et reverà præter illam nil aliud sensum ingredi, vel commovere videatur; de illa primo disficiendum venit. Et ejusce quidem de natura à Physicis magnoperè desceptatur; an puta sit corporea quædam substantia, an qualitas; an actio tantùm, aut motus quidam; de productione quoque consequentèr ejusdem, & propagatione disquiritur, utrùm continuo per medium transitu, vel medii duntaxat impulsu, vel suâ ipsius multiplicatione quâdam huc propagetur; quales ego quæstiones curiosè non eventilabo. Quod istam saltem sententiam attinet, quæ lucem accidentium classi accenset; quando veris corporeis effectibus (quales sunt rectâ progredi, repercuti, refringi, calorem excitare, sensum afficere) veræ subsistentes causæ, veri locales motus assignari debeant; neque quomodò meræ qualitati, vel accidenti cuipiam ista competant intelligere mihi datum sit; quinetiam quo sese pacto multiplicare valeat, id genus entium, quâ ratione vim ullam exerere, cùm è cordatioribus & rerum intima perscrutantibus Philosophis haud pauci se parùm capere profiteantur; eam haud dubitem hìc missam facere. Verùm an corporeæ quædam ἀπόῤῥοιαι, de lucidi corporis visceribus emanantes, totúmque nobis & ipsi interjectum spatium quàm pernicissimè transcurrentes lucem constituant; vel an illa potius nihil sit aliud quàm ipsius lucentis actio, contigua sibi corpora prementis ac impellentis, iisque mediantibus alia, quæ adjacent; tum & horum intercessu rursus alia proximè succedentia;

cedentia; nec non ità perpetuâ deinceps ad nos deductâ ferie; vix ausim certè mihi dijudicandum accipere; adeò paribus utraque pars argumentis niti videtur, æquis utraque difficultatibus urgeri. Quin eo fere propendeo, ut censeam utroque subinde modo lucem procreari, tam per effluvia corporea, quàm per continuum impulsum; fatiúsque fore nonnullos ejus effectus huic, alios illi tribuere. Sanè cùm ad quantum intervallum undiquaque protensum exiguæ lampadis flammula se vividè conspiciendam præbeat, adeò quidem ut integrum ejus radiatione circumpositum medium perfundi complerique videatur, animadverto; quomodo tantillum corpus tali tamdiu suppeditandæ profluviorum copiæ par sit; quomodo dum ea profundit non ipsum plusquam exhauriatur, & confestim evanescat, haud facile capio. Cum verò rursus lucis inflectiones, illásque qui consequuntur effectus cogito, vix animo meo nudus impulsus facit satis. Itaque mentis anxius hæreo. Veruntamen quia de natura lucis aliquid præsternam expedit; iis quas mox tradam hypothesibus nonnihil explicandis congruum; hoc se modo, vel non absimili rem habere concipio.

VII. Pono corpus omne lucidum, ut tale, congeriem esse quandam corpusculorum ultrà pene quàm cogitari potest minutorum & exilium; horum autem unumquodque vehementissimo motu percitum, aliquò (secundum legem istam naturæ fatis receptam & exploratam) rectà tendere; tum medium circumstare, fluidum quoque (cujus nempe partes nullo colligatæ nexu quaquaversùm liberè feruntur) è corporibus aggregatum, exilissimis quidem & illis, ast priorum respectu bene crassis & solidis; ità tamen ut hoc meatus habeat, & interstitia tenuioribus illis admittendis opportuna; quin & horum crassiorum corpusculorum occursu progressum impediri multorum ex illis, quæ in lucidi superficie versantur, aut ab ea ruunt corpusculis; ut necesse sit iis sic inhibitis, atque repulsis introrsum se recipere, quo fit ut dicta congeries (aliis etiam in eam aliunde confluentibus ejusdem naturæ corpusculis) aliquatenus intra suos cancellos restringatur, nec toto statim in auras expansa dissipetur. Interim verò complura per dictos canales repertâ viâ cursum suum rectà continuare, materiam inibi deprehensam haud ità fortiter obsistentem in fugam agentia,& ante se protrudentia; quorum vestigiis alia de lucido corpore similiter prodeuntia prorsus insistent, longúmque simul omnia lucis rivulum efficient, indeflexâ serie procurrentem. Quin & istorum fortè nonnulla memoratas medii crassiores particulas impetu ferire tam prævalido, nonnunquam ut ipsas quoque cedere cogant, & secum conspirantes in directum adjacentia

centia, corpora propellere; quæ & pari modo proximè succedentibus vim inferent, & ita continuò, sic ut simul & semel indefinitè protensa talium corpusculorum series promoveatur, & antrorsum connitatur; qualis utrolibet modo producta lucis propago radius consuevit appellari. Ità quidem rem existimo simpliciter obtingere, donec medium permanet homogeneum, hoc est ejusdem fermè magnitudinis, soliditatis, ac figuræ partibus constans, & similibus interstitiis pervium; at si medium occurrat aliter affectum, è diversis quippe secundum quantitatem aut figuram particulis compactum, porisque laxioribus, aut strictioribus pertusum, cujúsque proinde materia vel promptius cedat, aut contumaciùs obluctetur, oportebit illius seu cursus, seu impulsûs vim, effectúmque demutari; quin & si novi medii superficies ita transeunti lucis amni se obliquam objiciat, ejus quoque directionem infringi; vel ἀνάκλασιν contingere, quam *Aristoteles* vocat, eo nomine (quas nunc distinguere solemus) reflectionem simul ac refractionem complectens. Enimverò materiæ impingens ità compactæ, ut venienti transi um pernegat, aut prementis impetum inconcussa sustineat, aliò tota quò facillimè poterit & directissimè, regredietur & resiliet; aliò vim suam quam retinet omnem derivabit; id quod lucis reflectio dicitur (Hujusmodi verò corpus lucem non suscipiens eatenus opacum, (Hoc est terrenum, ut Grammatici volunt, ab Ope vocabulo prisco tellurem designante) appellatur; quatenus autem sibimet incurrentem aliò projicit, illustratum dici; quatenus objecti speciem redhibet aspicienti, speculum.) Quod si verò materia luci progredienti sic obviàm facta transitum utcunque præbeat, ejusve conatum excipiat, lentiùs tamen aut paratiùs præ illa, per quam priùs decurrebat, tum virtutis suæ quantitate aliquantùm hinc variatâ simul à recto quod affectabat itinere deflectetur; eo nimirum ordine modóque quem posthac conabimur elicere. Qualis effectus refractionis nomine venire solet (subnotetur autem, hoc modo lucem intromittens medium eatenus perspicuum, diaphanum, transparens, pellucidum appellari.) Ità lucis naturam, originem, propagationem, ac progressum ὁλοσχερῶς (omissis quæ adjungi possent plerisque minùs ad nostrum propositum spectantibus) expono; nec aliud ferè præter hæc requiro declarandis hypothesibus, quos communiter adsumunt Optici; quæque necessariò debent huic extruendæ Scientiæ præsterni. Comprobandis autem iis, quæ dixi non incumbam; cùm & (quod instituto nostro satis est) talia dari posse non minùs ipsâ luce clarum videatur, imò reverà dari complura declarent experimenta. Opticas verò quas innui hypotheses præcipuas subjungemus, & nonnihil attentabimus explicare.

VIII.

VIII. 1. Radii lucis (hoc est lucidi transitûs aut impulsûs quales descripsimus tramites) in eodem existentes similari medio directi sunt. Hoc è dictis abunde patet. Quin indè Corollarii vice deducitur radios quoad rem ipsam, Physicéque loquendo figurà prismaticos esse, vel cylindricos. Nempe corpusculum illud quodpiam in lucidi superficie positum, à quo radius originem suam ducit, dum à primò suo loco ceu base defertur aut totâ suâ superficie contiguum sibi corpus rectà propellit, figuræ suæ (vel impulsi saltem corporis figuræ) congruum designat, super hac vel illa base constitutum, solidum longum, exile, teres, quale cylindrus, aut prisma. Proinde quando Mathematicè rem tractamus, istos radios pro rectis lineis habere possumus; tum quia reverà sunt adeo tenues & recti; tum quia plerumque pro cylindricis ejusmodi seu prismaticis figuris ipsarum axes ità sumi possunt, ut nihil indè ratiocinio Mathematico derogetur.

IX. 2. Ab omni corporis lucidi (vel illustrati) puncto ad quodvis medii (non obstaculis intercisi) punctum lucis aliquis radius dirigitur. Hæc apud Opticos tritissima suppositio quò vel intelligi vel admitti possit, omninò duplicem limitationem exigere videtur, è supra dictis utramque deducibilem. Unam, ut omnis puncti nomine nedum non præcisè punctum quodcunque Mathematicum, ac nec omnem particulam concipiamus realem & Physicam; verum saltem admodum exiguam, qualíque ferme minorem vel animo designare nequeamus; alteram ut non in unoquoque strictè dicto temporis instânti, nec in omni reali temporis portiuncula cogitemus hoc contingere, sed ut nullum temporis intervallum sentiri possit ità curtum, aut momentaneum, quin intra ipsum à quavis lucidi designabili parte designatam ad medii partem radius aliquis exporrigatur. Enimverò cùm radiorum istæ quas assignavimus radices, lucidum componentia corpuscula, sint illorum, quorum nos utcunque quantitates sensu vel animo pertingere valèmus, corporum respectu tanquam infinitè parva, nec non infinita quasi pernicitate donata, non difficilè concipi potest in omni designabili, vel imaginabili lucentis spatiolo prorsus innumèrabilem eorum multitudinem existere, quorum fere singula diversas in plagas tendunt; ut nulla sit designabilis plaga, quam non una quæpiam appetat, aliquam saltem, utlibèt imperceptibilis & angusti, temporis moram interponendo. In eo siquidem tempusculo lucidi partes singulas innumèra successivè talia corpuscula subingrediuntur juxta deserúntque, de quibus mirum fuerit ni quoddam unum ad designâtum medii spatium tendat, sibi transmittendo meatuum aliquem (quos & pari ratione tan-

quam

quam infinitos supponere fas est) idoneum reperiens. Ità vulgare pronunciatum interpretor; id quod alias rigidè sumptum haud verum duco. Nec enim idem corpus eodem temporis puncto diversas in partes contendere, vel adniti; sed nec eandem præcisè medii partem è diversis locis accedentes corporum motus excipere quisquam conceperit, opinor, aut ego concesserim; non certè magis quam idem corpus unà plures locos occupare, vel eundem locum plura simul corpora suscipere; ad istum modum intellecta dicta suppositio totam una cum radiis lucidis naturam, omnem, ut mihi videtur, Physicam permiscebit. In nostro rem explicandi modo nihil durius obversari video, quam ut hinc divinæ potentiæ, sapientiæque vis magis elucescat, in luce sic efformanda, tam ejus effectricibus particulis admirabilem exilitatem, incomprehensibilemque velocitatem impertiendo, quæ prorsus ei necessariæ fuerunt, ut sensionem efficeret, & reliqua tam utilia ei destinata munia obiret. Sanè lucis corpusculum unum ab arenula quavis litorea plusquam eâ fortassis proportione superatur, quâ tota quanta quanta est mundana moles arenulam istam excedit; id quod non ita censebit absonum, quisquis ad complures satis obvias apparentias mentem adverterit.

Subnotandum est porrò duas has fundamentales hypotheses, sic acceptas, innumeris admodum familiaribus experimentis confirmari. Quovis enim in loco ubicunque collocati objecti lucentis vel illustrati quæcunque designabilis particula conspicitur oculo, repræsentatur in speculo, modo nihil objiciatur ab eo rectà delabentes radios intercludens; eadem verò statim oculo subducitur, & penitus obumbratur, si quid opaci corporis directum intercipiens radiorum iter obtendatur. Etiam foramen utcunque tantillum sufficit trajiciendis radiis quibus tota quantivis objecti facies obversa depingatur. Et porrò quam nulla possit apprehendi tam exigua lucidi pars, à qua non lux ad oculum defluit, perspiciliorum usus apertissimè monstrat. At pergo.

X. 3. Lucis radius quilibet alteri medio perpendiculariter incurrens, aut rectà progreditur, siquidem cedente medio procedere valet, aut in partes directè contrarias (hoc est in se, vel in suam retro semitam) repellitur. Experientiâ firmatur hæc hypothesis; & rationi quoque consentanea est; nec enim ulla potest excogitari causa, cur in unas potiùs quàm in alias partes deflectatur; igitur in nullas. Quinimò si verum sit omne patiens, aut percussum vim inferenti positivâ quâdam vi repugnare, perspicuum videtur eò resistentiam dirigi, unde vis ingruebat; ejúsque consequenter effectum absolutè loquendo, tantùm illic deprehendi.

deprehendi. Quod sanè mihi tam verum apparet, ut non dubitem hanc ipsam hypothesin ad omnimodos incursus extendere; seu generatim effari, quod pulsus omnis & motus, utcunque medio cuilibet impingens, directè (per se nimirum, propriè, distinctéque rem æstimando) continuatur, aut prorsum aut retrorsum. Scilicet, exempli causâ, si duo baculi A B Y Z, C D Y Z in idem medium E F (illud perpendiculariter, hoc obliquè) uniformi quâdam pressione vel impetu adigantur, existimo medii cessione vel resistentiâ totam (quâ baculus obliquus fertur, aut medium impellit) vim æquè rectâ semitâ antrorsum versus I K, vel retrò versus C D derivari, ac perpendicularis ipsius impetus in G H progreditur, aut regreditur in A B. Quod enim nonnulli putant medii superficiem baculi perpendicularis tendentiæ magìs opponi, quam obliqui, proindéque perpendicularis impulsum rectà continuari, sed obliquum alio detorqueri; vel assertionem ipsam non agnosco, vel non admitto consequentiam. Enimverò si per illud opponi nil aliud volunt quàm realiter objici, seu obstare rectà pergenti, non minùs eo modo superficies E F opponitur baculo C D, quàm ipsi A B; rectum enim ejus progressum pariter intercipit, impedit, demutat. Verùm si quam aliam nescio quam imaginariam oppositionem intelligunt, nihil video quod huc faciat indè consectari. Profectò rem abstractè, nec ut accidentarium quid immisceamus, expendendo, nihil attinet ullam medii partem considerare præter illam, ad quam corpus progrediens aut propellens ei occurrit; hæc enim sola resistendo quicquam efficit, aut cedendo. Quare per rectam D Z progredienti impulsui solum punctum Z opponitur; perindéque fuerit qualem reliqua medii superficies obtinere situm concipiatur. Punctum autem Z æquè pulsui venienti à D per rectam D Z, atque tendenti per rectam Z K versus K contrariatur, ac ei qui à B per B Z procedens iter affectat per Z H versus H. Idémque de reliquis medii punctis intelligi par est, quibus uterque baculus ipsum contingit, aut ei applicatur. Itaque reverà par utriusque pulsûs quoad oppositionem est ratio; similisque proinde utrobique resultabit effectus; pulsum nempe recto tramite vel transmittere, vel rejicere. Verùm longè secus eveniet, si baculum alterum obliquum, seu P D Y Q, cum ipso A B Y Z conferamus. Etenim superficies E F baculi A B Y Z motui, vel impulsui magìs opponitur, aut obsistit, quàm motui vel impulsui baculi P D Y Q. Quoniam illi toti cum tota sui parte Y Z, huic verò tantum ex parte Y renititur; è qua discrepantia necessariò dispar effectus consequetur, ut nimirum pulsûs aut motûs directio mutetur. Quod discrimen eò luculentius adnoto, quoniam hoc arbitror modo (vel adsimili) lucis radios Fig. 1.

dios diverso medio obliquè incidentes, velut experimur, inflecti; saltem eò spectantia lucis præcipua symptomata, tribus porrò subjiciendis hypothesibus comprehensa, vix aliâ ratione commodius explicari.

XI. 4. Omnis radii lucidi inflectio (hoc subinde generali nomine, compendii causâ, tam refractionem, quàm reflectionem complector) fit in superficie ad medii inflectentis superficiem perpendiculari, seu recta. Hujusce suppositionis haud ullam facilè satis commodam & claram rationem reperias apud Opticos; petitione principii, vel incomprehensibili quâdam obscuritate laborat quicquid fermè eò spectans afferunt; neque valdè miror radium lucis semper ut rectam concipientibus individuam lineam id eis accidisse; quo posito vix probam ullam ejusce rei causam assignari posse credo. Cadat enim radius linearis A B in speculi (instantiæ gratiâ) plani superficiem ad punctum B; per quod utcunque ducantur duæ rectæ C D, E F; cùm igitur rectæ A B, C D sint in uno quodam plano, quidni reflectio radii peragatur in isto plano? Simili ratione quoniam rectæ A B, E F sunt in uno plano, quidni radius in hoc etiam reflectionem patiatur? eodémque planè modo quid obstat quo minùs in singulis omnibus, hoc est infinitis planis, speculi superficiem secantibus, & per rectam A B ceu communem sectionem traductis perficiatur reflectio, idémque proinde radius unus in partes undique cunctas reflexus dispergatur? cur hoc fieri non possit, utique non capio. Quod respondetur enim, posito plano A B C ad speculi superficiem recto magis illud planum, quam cætera quævis speculi superficiei contrarium esse, proindè resistentiam in eo maximam contingere, proptereàque radium in eo potissimùm inflecti, parùm satisfacit; quoniam, ut superius insinuatum, extra punctum ipsum B, cui radius impingit, alia nulla specularis superficiei pars meritò venit consideranda quid enim (ut hoc adjiciam prædictis) an in universam quà longè latéque distenditur, ipsius speculi superficiem agit hic linearis radius, & ab ea vicissim patitur; an in ejus definitam aliquam partem agit, patitúrque ab hac? quis in totam agere, vel à tota pati concedet? Et cur id uni parti deputandum præ aliis? ubi terminus figetur? quousque procedet operatio? quinimò potiùs, quia radii per rectam A B procurrentis impulsui tantùm id speculi quod est in recta A B versus G protracta resistit, ideò pulsus in ipsam A B rejicietur; Et nulla succurrit causa sontica, propter quam aliorsum deflectat; nihil datur, quod ejus tendentiam alio determinet. Igitur ut aliis, quæ puto variæ assignantur, hujus effecti causis excutiendis abstineam, indè genuinam ejusce rationem (ut & generatim omnium

Fig. 2.

quæ

quæ circa radiorum inflectionem primitùs obveniunt) existimo petendam, quod lucis radius non mera sit linea, verùm dimensionibus omnimodis præditum corpus; utpote (juxta quæ præmonuimus) cylindricum aut prismaticum, pro figura corpusculi, à quo oritur. Supponatur, aliquatenus illustrandi propositi ergò, Parallelepipedum ABCDEFGH lucis radium obliquè speculo incurrentem repræsentare; cujus latus BF applicetur speculo, dum interea reliquum ejus supra speculi planum elevatur. Impedietur ergo Parallelogramum ABFE, nè recta procedat; indè continget rectam BF aliquò supra dictum planum resilire. Verum in allas saltem partes fiet hæc reflectio, secundum quas rectus radii progressus, quoad ejus fieri potest, quàm minimè pervertetur. Cùm enim is rectissimum cursum affectet, eum (ex indole certa, perpetuáque lege naturæ) si perfectè nequit, at tamen ut proximè consequetur. Itaque cùm inter plana latera ABDC, EFHG sibimet opposita cursus ejus anteà dirigeretur, & objecta superficies nihil jam obstet, quo minus inter eadem plana, tametsi sursum excussus, progrediatur, admodum liquet etiamnum inter illa semitam ejus contineri; locumque seu plagam reflexionis eatenus haud perperam determinari. Cæterum est planum ABDC, eique oppositum EFGH speculi plano rectum; quia Parallelepipedum rectum ponitur, & ideo lateralis recta BF in speculi plano existens, planis ABDC, EFHG recta. Quocircà si totum hoc Paralleledipedum ob exilitatem suam, aut Mathematicæ computationis gratiâ, pro recta quasi linea censeatur, erit pariter & reflexus radius etiam linea recta; nec non uterque continebitur in superficie ad speculi planum recta. Non dissimili ratiocinio, si radius cylindri recti figura præditus admittatur (qualis nimirum à corpore procurrente, vel impulso producetur, id si Sphæricum fuerit) etiam radius in superficie plano speculi recta reflectionem ostendetur subire. Speculi quippe plano rectus incidat cylindrus ABDC; cujus bases AMCN, BODP, axis XZ; ita scilicet, ut basis BODP speculi planum contingat in B; reliquum ejus corpus (prout in figura depictum exhibetur) obliquè surgens supra planum emineat. Basis autem diametri BD, PO sese normaliter secent; ac per ipsam PO, & axem ductum planum efficiat in cylindro Parallelogrammum POMN. Si jam per hujusce latera MO, NP ducta concipiantur duo plana axi parallela, cylindrúmque contingentia, liquebit (ex antedictis causis pariter applicatis) totius cylindri ductum inter hæc duo plana comprehendi, radiique reflectionem inter ipsa definiri. Sunt autem hæc plana speculi plano recta. Sit enim recta GBH communis sectio circuli BODP, planique

Fig. 3. Fig. 4.

 specularis;

specularis; hæc utique circulum continget; (quia speculi planum, ex hypothesi, non alibi præterquam ad B circulo occurrit, adeóque nec recta G H) quare rectæ G H, O P sunt parallelæ. Ergo P O est ad speculi planum parallela. Huic verò perpendicularia sunt plana prædicta cylindrum contingentia per M O, N P ducta; axi parallela. Quapropter eadem speculi plano recta erunt. Hinc, ut antea, si totus radius habeatur instar rectæ lineæ, continget ejus reflectio velut in superficie ad speculum planum recta; quippe cùm ejus latitudo tota comprehendatur inter ejusmodi duo plana; quæ proinde si nulla supponatur, in unum illa coalescent. Accommodari possent hæc cuicunque radii figuræ tali, qualem supra descripsimus, utcunque nonnulla demutando; sed & eadem pari ratione radiorum refractionibus adaptentur. At pluribus parco.

LECT. II.

I. VIæ, quam nuper aperuimus, & aliquatenus ingressi sumus, inhærentes eò jam devenimus, ut nobis incumbat proximè celebres illas hypotheses (an Theoremata malitis appellare) radiorum inflexorum itineri penitus determinando (imaginúmque proinde locis, figuris, quantitatibus investigandis, nec non apparentiarum quarumcunque causis explicandis) necessarias, experientiæ quidem bene consonas illas, etiam aliquo rationis suffragio communire; præstratis utique fundamentis, ac suppositionibus insistendo. Cùm itaque lucis radio corpus adsignatum sit figurâ prismaticum, aut cylindricum; Et hoc quidem rectum (utpote præ reliquis simplex, & naturæ totas suas in agendo vires exerenti præsertim conveniens;) cùm & exinde progressus ejus eatenus fuerit definitus, ut intra superficies duas planas inflectenti medio perpendiculares includatur; quas quidem abhinc (quando nullus transversæ dimensionis illius, vel intervalli superficies istas dirimentis ad rem nostram, illam saltem quam nunc attingimus spectans effectus, aut usus sit) brevitatis & perspicuitatis causâ, velut unam habere possumus; adeóque jam radium ut duabus solummodò dimensionibus præditum, & ad instar Parallelogrammi cujusdam rectanguli, in plano ad medii inflectentis superficiem recto jacentis, considerantes, reliquam itineris quod persequitur determinationem, ultimam

mam illam & completam, investigabimus, ac exponemus; cujusce quidem circa reflectionem inquisitionis consectaria resultabit hæc propositio, passim ab Opticis recepta:

II. 5. *Radius incidens, & reflexus ad speculi, vel opaci reflectentis superficiem angulos constituunt æquales.* Hujus effati declarationem sic exequimur. Parallelogramum rectangulum A B C D lucis repræsentet radium obliquè plano speculo E F incidentem. (Recta scilicet E F sit communis sectio plani ad speculum rec i, in quo dictum Parallelogrammum existit, & in quo, secundum præmissa, reflectio peragitur, cum plano speculi.) Cùm itaque Parallelogrammi punctum B speculo primum impingens opaco ac impervio, recta progredi nequeat, conetur oportet (ut præstruximus) retrò versus A per ipsam rectam B A resilire. Cùm autem intereà rectæ B D supra speculum eminentis alter terminus D, nullo præpeditus obstaculo pari vehementiâ cursum quoque suum adnitatur promovere per rectam C D H; palàm videtur utriusque conatibus adversis non aliter faciliùs aut propiùs satisfieri posse, quàm si utrumque circa punctum Z rectæ B D medium rotationem concipiat. Sic enim utrumque pariter & quàm minimum à recto quem affectent cursu deflectent; siquidem rectæ B A, D C circulum B β D δ tangunt, centro Z per B & D descriptum. Cùm autem hujusmodi motum circularem obeundo punctum B descripserit arcum B β, & punctum D arcum D δ, hoc est quando recta B D obtinuerit situm β δ, etiam ipsum punctum D speculo impinget ad δ; reditúmque proinde per arcum δ D, scilicet ipsius quoque jam intercisо cursu, molietur; Sed & nunc temporis ipsum punctum B ad β positum per arcum β D tendit; quorum certè motuum adversantium alter alterius effectum impediet; itáque proximo saltem, quoad fieri poterit, utrumque progressus arripient; proximi vero sunt qui per tangentes βα, δκ; qui & sibi nihil repugnant, at potiùs omninò secum conspirant; itaque punctum B per rectam βα, punctúmque D per rectam δκ procurrent, adeò ut totus radius A B D C jam acquirat situm αβδκ; & per hanc orbitam rectà motum suum prosequatur. Liquet autem angulos ABF, κδE æquari. Nam æquantur anguli Z B δ, Z δ B; quapropter adjunctis hinc indè rectis ZBA, βδκ toti A B F, κ δ E pares erunt. Unde patet è duobus quoque rectis residuos A B E, κ δ F æquari; quod propositum fuit ostendere. Fig. 5.

III. Ità de præmissis suppositionibus nostris fundamentalem hanc Catoptricæ legem seu regulam elicimus, quàm verisimiliter aut concinnè

cinnè penès vos esto judicium. Non diffitebor autem aut penitus dissimulabo non esse nihil quod his objici possit, & dubitandi causam injicere. Cur enim, percontetur aliquis, quando solum punctum B versus A renitatur, & totum lineæ B D quod superest partes appetat contrarias, non circa punctum quodpiam aliud in ipsa B D, puncto B propinquius, ut puta circa X, potiùs ista gyratio concipiatur peragenda? Respondeo quàm brevissimè (quoniam incitato cursu tendens ulteriùs ægrè remoras fert) id in natura constanter accidere, quum motus rectus in circularem degenerat, ut extremæ sibimet adversæ mobilium partes omnem motum dirigant ac moderentur, reliquis ad illarum ductum componentibus se, motúsque suos attemperantibus; neque non his quos ob extremarum contranisum, atque conflictum amittere necesse habent in illas transfundentibus; quo fit ut mediis hinc indè quàm tardissimè dimotis extremæ velociùs revolvantur, Itaque cùm extrema puncta B, D partes in contrarium æquâ vi nitantur, neque nisi circa medium punctum Z rotatio peragatur, quod effectant assequi possint, id statim fiet, & reliquæ partes haud gravatim obsequentur. Nè dicam in recta B D nullum aliud punctum existere, cui præ aliis jure prærogativa competit, ut circa ipsum mobile libretur. At pluribus abstinens ad refractionis præcipuam legem haud absimili discursu proliciendam atque declarandam accedo. Hanc nempe:

Fig. 6.

IV. 6. Radii lucis alteri cuipiam dissimili perspicuo (nimirum homogeneo quoad se) incidentes ità refringuntur, ut perpetuo recti sinus inclinationum, quas habent incidentes, proportionales sint rectis sinubus inclinationum, quas obtinent refracti. Huic elucidando, stabiliendóque decreto; Parallelogrammum A B D C lucis radium repræsentans impingat planæ superficiei E F pellucidi medii (vel sit recta E F sectio communis, ut in casu præcedente, quod & abhinc semper intelligatur) progressum ejus aliquatenus retundentis. Itaque medium isthoc subingrediens punctum B procedere, tardiùs quidem, attentabit per rectam B G, seu peripsam A B protractam, intereà verò punctum D in primo durans medio motum suum priorem adurgebit in recta C D H. Hos autem conatus, aliàs irritos futuros (nec enim utrumque potest rectum motum illud tardiùs, hoc velociùs incedendo conservare) quàm proximè consequentur, modò circa punctum aliquod in recta D B producta situm, puta quale Z, rotentur; ità scilicet ut dum punctum D in medio rariori (rarius appello quod minùs resistit, aut retardat; ut & densius quod motum magis reprimit, & tardiorem reddit) velociùs latum describit arcum majorem D δ; punctum B tardiùs

tardius in medio contumaciore delatum minorem arcum B ϛ delineet; quibus peractis recta B D tenebit situm ϛ δ. Cùm verò jam punctum D densius quoque medium interet ad δ; proindéque pariter & ipsum retardetur; motus isti circulares protinus extinguantur oportet (nec enim jam punctum D velocius feretur quàm B; nec ideò majorem ut prius simul arcum describet.) Itaque prius iter, quàm poterunt proximè, deserentia tendent utrumque per horum arcuum tangentes δ κ, ϛ α; radiúsque totus A B C D hoc modo detortus, & situm α ϛ δ κ nactus per hanc posteà semitam rectà decurret Adnotandum est autem quæcunque sit rectæ A B ad rectam E F inclinatio arcus D δ, B ϛ (vel semidiametros Z D, Z B) eandem semper habere proportionem inter se; talem nempe, qualem in densitate, seu resistentia peculiare discrimen exigit. Etenim supponatur in quovis superficiei pellucidæ loco positum nobile punctum B; cùm medium hoc ex hypothesi sit homogeneum (hoc est ubique pariter obsistens) nulla potest, opinor assignari ratio cur hoc mobile non in quasvis partes æquâ velocitate deferri possit; nimirum æquè celeriter ad Q tendet, (impetum modò ceperit isthac dirigentem) per rectam O B Q, ac in N per rectam A B N. Adeóque radii lucidi A B, O B utcunque differenter inclinati parem omnino resistentiam invenient; punctum, inquam, B, seu versus Q, seu versus N nitatur, æqualiter, eodémque modo retardabitur. Quinetiam cùm punctum D in primo medio semper eâdem, quæcunque fuerit ejus positio, celeritate promoveatur, satis apparet motus istos, aut motuum semitas eodem tempore decursas, arcus nempe circulares D δ, B ϛ semper eandem inter se proportionem servare; nimirum illam, quam habent semidiametri Z D, Z B, vel Z δ, Z B; quæ idcirco proportio, principaliter ac primariò, radiorum refractiones, ad eadem duo media factas, determinat atque metitur. Hanc autem eandem esse patet cum illa, quam habent recti sinus angulorum ipsis Z δ, Z B in triangulo Z δ B oppositorum. ipsorum scilicet Z B δ (vel Z B E) & Z δ B. Est autem angulus Z B E complementum anguli A B E, (hoc est angulus inclinationis rectæ A B ad E F) & angulus Z δ B est complementum anguli F δ κ, vel inclinatio rectæ δ κ ad eandem E F. Igitur abunde liquet propositum. Patet verò, quod in hoc casu, angulus E B Z major est angulo B δ Z; vel, ductis B M, δ N ad E F perpendicularibus; quòd angulus M B G major est angulo N δ κ; adeóque quòd hic refractio versus perpendicularem, quod aiunt, contingit. Ac ita quidem quando radius radius in medium transit, sibi magis obsistens, seu densius. At si medio incurrit faciliorem transitum præbenti, seu rariori, planè simili modo, sed inversè se res habet.

Fig. 7.

Fig. 8.

Quod

Quod (licèt breviùs) conficeretur negotium adſumendo ſicut eadem *Thebis Athenas*, ac *Athenis Thebas* eſt via, ità radium de raro tranſeuntem in denſius, pérque denſius veſtigia ſua replicantem in rarum nil aliud quàm eandem ſemitam repetere; ut nempe ſi radius A B D C de raro tranſiens in denſius refringatur in α ϛ κ δ; quòd etiam hic radius α ϛ κ δ è denſiori recidens in rarum viciſſim in A B D C refringetur; quia tamen aſſumptum illud non nemini demonſtrationis & ipſum indigere videatur; Et univerſim, extremóque rigore ſumptum forſan haud adeò verum ſit; majoris etiam evidentiæ cauſâ; preſertimq; demùm quoniam huic caſui nonnulla quodammodò peculiaria ſunt notatu non indigna; quin addo quia præſtare videtur effectum unumquemque propriis è cauſis deduci) ſeparatim oſtendemus. Rurſum igitur radius A B D C, quâ priùs figurâ donatus rarioris medii ſuperficiem E F incurrat. Cùm igitur punctum B velociùs procedere jam valeat quàm anteà (medio ſcilicet illapſum promptiùs cedenti) hoc eſt quàm punctum D, neceſſariò commutabitur rectus utriuſque, quem affectant, motus in ei proximum circularem, circa punctum aliquod

Fig. 9. in recta B D, puta circa Z; ità ut Z D, Z B talem inter ſe proportionem obſervent, qualem ſingularis exigit horum in reſiſtentia mediorum diverſitas; utique ſicut in quæ præceſſerunt; cùm verò punctum B ità circumductum deſcripſerit arcum B ϛ, & punctum D arcum D δ; puncto D ad δ tunc medium rarius ingredienti, ceſſabit iſta motuum inæqualitas; adeóque ſimul neceſſariò deſinet rotatus circa punctum Z; ambóque puncta B, D per dictorum arcuum tangentes ϛ α, δ κ (rectæ Z ϛ perpendiculares) quod proximum eſt iter arripient. Rurſus autem, pariter ac in caſu præcedente, rectæ Z D, Z B (vel Z δ, Z B) proportionem exhibent, quæ refractiones hujuſmodi dimetitur; habent autem Z δ, Z B ſeipſas, ut recti ſinus angulorum Z B δ, Z δ F; hoc eſt ut ſinus inclinationis rectæ A B ad ſinum inclinationis rectæ δ κ; quod propoſitum fuit oſtendere. Liquet autem quòd hìc ang. Z δ F major eſt angulo Z B δ, adeóque quod refractus divergit à perpendiculari.

V. Advertendum eſt porrò quoad priorem hypotheſin, ſeu caſum radii de medio rariori contendentis in denſius, eum ſemper, qualiſcunq; ſit ejus obliquitas, medium denſius ſubire; & per ipſum incedere; modo commonſtrato. [Simpliciter autem hoc, & abſtractè debet intelligi, nec ut accidentarium quicquam interveniat, qualia ſunt, opacitas perſpicuitati immiſta, figura diaphanum terminans, ejus craſſities inæqualis, aliud quid poſt poſitum diaphani reſiſtentiam promovens; cujuſmodi

cujusmodi quippe de causis diaphanum subinde forsan evasurum est opacum, & instar opaci radios valebit repercutere; ceu quando lapis in aquam impingit obliquè; cùm hydrargyro substracto vitrum munitur. Dum lapis *e. g.* obliquè impingit superficiei E F (cui parallela O Q) per lineam A B; tota linea B Q ad fundum O Q protensa venienti repugnabit, auxilii quoque nonnihil conferente fundo O Q; neque mirum fuerit, si major hic renitentia deprehendatur, quàm ubi radius alter M B P perpendiculariùs incurrit, quando major sit B Q, quam B P.] At nos seclusis istis medium velut interminatum, in omnes partes æqualiter resistens, absolutè perspicuum, & radios ex se non respuens accipimus; quibus suppositis perpetuò quod dixi, radius, obliquitate quâpiam incidentiæ nil vetante, medium densius penetrabit. Verùm in alterò casu, cùm de medio densiori lux rarius incurrit, non semper ea medium hoc permeabit. Nam si magna satis fuerit obliquitas; subinde radius inflexus supra superficiem E F attolletur, angulúsque (qui dicitur) refractus, aut inflexus rectum exsuperabit; quinimò fieri potest ut ipsum exæquet. Sit in exemplum primò inclinatio graduum 45, vel semirecta; Et Z B ad Z D se habeat ut quadrati diameter ad suum latus (quæ fermè proportio radiorum ex aqua in aerem transeuntium, experientiâ contestante, rationem metitur) radius velut in ipsam E F refringetur, aut eam stringens procedet. Est enim Z δ (æqualis ipsi Z D) jam ad E F perpendicularis, adeoque δ κ arcum δ D contingens ipsi E F congruet. Unde patet obiter, id quod superiùs insinuatum, non universim constare, quòd radius à quo loco medii unius in aliud processit, ad eundem retrogradus accedet. Hoc enim saltem in casu radius A B refringitur in ϛ α superficiei media dirimenti parallelam; veruntamen qui per α ϛ progreditur minimè recedet ad B A, nec ullam, ut manifestum est, omninò refractionem patietur. Sed hic casus tantùm unus, & quasi pro nullo censeri potest. Quod si, servatâ quoad densitatem eâdem proportione, radius A B paullò magis ad rectam E F inclinetur, ejus. Refractus supra ipsam E F assurget; punctum quippe D rectam E F nunquam pertinget; & punctum B decursâ rarius intra medium peripheriâ B ϛ in densum remeabit; in quo proinde rursus, circulatione suâ dimissâ, per tangentes ϛ α, δ κ ferentur; adeò quidem ut radius ABCD jam reflecti videatur, quatenus medium densius haud penetrat totus, vel egreditur.

Fig. 12.

Fig. 13.

VI. Nec ineptè quidem (etsi quodammodò, velutique primariò, sit refractio) reflectionis nomen adsciscit hæc actio, quatenus & ipsa

reflectionis leges examussim observat. Nam quoniam isosceles trianguli Z B $\mathfrak{c}$ anguli Z B $\mathfrak{c}$, Z $\mathfrak{c}$ B sunt æquales, etiam anguli (de rectis residui) A B E, α $\mathfrak{c}$ F pares erunt; quod reflectioni proprium est. Itaque non abs recto pronunciant hoc Dioptrici; neque tamen causam, fortassis ab iis prætermissam, tacere volui, nonnihil ab immediatæ reflectionis causa diversam; nè quisquam hæsitet, aut hoc adsumenti gravetur concedere.

Kepl. prop 14.

VII. Hæc autem doctrina cùm multis experimentis utcunque comprobari queat, unum saltem breviter attingam satis illustre, neminisq; non examini patens. Esto triangulum A B C sectio prismatis triangularis æquilateri (nimirum vitrei, seu crystallini) basi parallela; in hujus autem base sumatur punctum quodpiam F, & sit angulus C F G circiter graduum 50. (unde juxta doctrinam hic insinuatam, & posteà clariùs exprimendam, radius G F velut extremus erit eorum, qui rectæ B C è vitri partibus illabentes refractionem patientur; eo scilicet obliquior quilibet reflectetur.) Sit igitur (quoniam utramque quasi patitur inflectionem) ejus refractus F M, reflexus F E; item F G refringatur in G O, & F E in E R. Porrò jam in G O statuatur oculi centrum O; & ab eo prodeat radius O Q, qui refringatur in Q P; ipsorum O G, O Q refracti G F, Q P (uti secundum principia nostra posthac constabit) progredientes divergent; eritque propterea ang. Q P C ⊏ G F C; quare radius Q P medium B C penetrabit, ac refringetur, puta in P N; liquebit autem è dicendis refractos F M, P N à se divergere; Hinc jam radiis M F, N P interpositum objectum radiis O G, O Q interjectum apparebit, velut ad $\mu\nu$, situ neutiquam immutatum. Rursus autem ab oculi dicto centro prodeat alter radius O K, cujus refractus sit K I; hic itaque rursum à G F diverget, ac indè erit ang. K I F ⊐ ang. G F C; adeóque K I minimè penetrabit medium B C, at reflectetur, puta in I H; tum I H refringatur in H S. Ergò jam radiis E R, H S interjacens objectum puta R S radiis O G, O K interjectum cernetur, velut ad $\varrho\sigma$, situ partium everso. Consequùntur hæc doctrinam nostram, & experientiæ liquidò consentanea deprehendentur, quin & observatu dignum erit, è duplici refractione spectatum objectum M N Iridis coloribus tinctum adparere (rubro scilicet ad μ, cæruleo ad ν, croceo medium occupante) objecti verò R S è duplici refractione, sed reflectione tamen intercedente, apprehensi imaginem $\varrho\sigma$ colore nihil ab ipso objecto differre. Quod ex eo sanè videtur evenire, quoniam ang F E B angulo F G C æquatur; adeóque radius K O non aliter è vitro exit, quam R E ingressus est; seu

Fig. 13.

ſeu quicquid retractio ad E effecit, id refractio ad K retexit, radium in ſtatum reſtituens, ei quem ab origine habuit non diſparem. Verùm hæc non eſt hujus loci penitiùs excutere, Saltem obſervari meretur hoc præcipuum, ut arbitror, in priſmate Phænomenon.

VIII. Hæc, inquam, cùm ab experientia confirmentur, neque tamen ei magis, quam ratiociniis noſtris conſentiant, cauſis tamen adſcribuntur (a quibuſdam) nedum diverſis, at prorſus adverſis. Quòd enim vitrum *e. g.* radios intra corpus ſuum receptos, ejúſque poſticæ ſuperficiei obliquius incidentes retrocedere cogat, hujuſmodi rationem exhibent: aiunt vitrum radios faciliùs admittere, vel tranſmittere quàm aërem; quin addunt aërem vi reflectendi prævalidâ pollere; quódque proinde qui poſt vitrum adventanti radio fit obvius aër cum reverberat. Quæ ratio mihi non adblanditur. Nam imprimis rei naturæ minùs conſentanea videtur. Quum enim aëris corpus ex æthere puro maximam partem, è corpuſculis terrenis, & ex halitibus aqueis conſtare totum videatur; ex his partibus æther, opinor, non minùs promptè quàm vitrum radios tranſmitti; aqua verò ſaltem (ex illorum, quibuſcum diſputamus, ſententiâ) tantillo difficiliùs; adeóque neutiquam harum alterutri dicta reflectio jure videtur attribuenda; terreſtres autem particulæ (quæ præ reliquis etiam pauciores videntur, & rariùs interſperſæ, præſertim in aere ſudo ſummíſque montium excelſorum jugis) ſunt opacæ, nec lucem admittunt, aſt eam in omnicunque pariter incidentiâ rejiciunt; adeò ut nec ad has quam reſpicimus lucis inflectio propriè ſpectet; ergò nihil ſubeſſe videtur cauſæ, cur aër (præ vitro) ingruenti luci potentiùs obſiſtat. Addo; ſi talis aëri vis reflexiva competat, & vera ſit, quam hi Philoſophi memorato Phænomeno cauſam adſignant, conſequi videtur, ut nulla prope Horizontem Stella conſpici poſſit (admiſſo ſaltem hoc, non inverecundo reor, ut pleriſque viſum erit, poſtulato; quòd purus Æther, naturale lucis vehiculum, aëreæ regioni ſuprajectus haud minùs facile quàm vitrum aut aqua radios intromittet.) Sit enim C terræ centrum, O oculus, S viſibile punctum longinquum, ceu ſtella, ſitum in Horizonte; per Fig. 14. puncta verò C, O, S trajectum concipiatur planum faciens in terræ ſuperficie circulum O P; in atmoſphæræ, vel aëris circumfuſi, extima ſuperficie circumferentiam Z N M; itaque cum radius quilibet, ut S M, vel S N (Horizontalis puta, vel eò ſuperior) in ſuperficiem M Z cadens ei incidat perquam obliquè (niſi ſaltem atmoſphæræ Semidiameter C Z præ telluris Semidiametro C O dicatur enormiter, & incredibiliter magna) cùm & aer idcircò, juxta ſententiam quam ex-

 pendimus,

pendimus, lucem admittere non debeat; omnino dicti radii S M, S N, & consimiles reflectentur, & extra atmosphæram procul abeuntes oculum non pertingent. Quinimò satis constare videtur exhinc, quòd radii quales S N ut visum afficere queant, aut accedere, versus perpendicularem N C refringi debent; id quod adversariæ Hypothesi pariter adversatur. Verùm hæc obiter, ac in trancursu dicta sunto.

IX. Porrò, subnotandum est, quoad binos casus suprà tractatos, cùm duo media, diversimoda comparandò duæ se representent proportiones, altera, terminorum situm transponendo, alterius inversa, refractionum ideò mensuras (quoad hæc) iisdem terminis designabiles ordine permutari. Ut si in primo casu sinus rectus anguli incidentis se habeat ad sinum rectum anguli refracti, sicut A ad B, in secundo sinus incidentis ad sinum refracti se inversè habebit ut B ad A; nimirum in præcedentibus figuris, quanto Z D major est quàm Z B, in prima Hypothesi; tanto constat Z D minorem esse quàm Z B, in secunda; mediis scilicet iisdem permanentibus.

X. Denique, cùm medii cui radius impingit superficiem hactenus adsumpserimus planam, advertendum superest, quamvìs illa curva sit, eodem tamen absque sensibili discrimine sese modo rem habere, ac si plano curvam superficiem isthic, ubi radius occurrit, contingenti impingeret. Incidat nempe radius A B C D in curvam lineam Q B R,
Fig. 15. quam ad incidentiæ punctum B tangat recta E F. Prorsus eodem modo refringetur iste radius ad curvam Q B R, quo ad rectam E F, nisi quòd isthic arcus D δ in rariori medio decursus tangentem aliquousque prætergreditur. Id quod eximiam radii subtilitatem considerando, quámque perexiguo distet intervallo punctum δ à curvæ vertice B, nullam omnino sensibilem (imò nec imaginabilem) inducet differentiam. Quantillus enim iste circulus esse debet, in quo chorda B δ, radii latitudine paullo major, arcum subtendet aliqua cum ejus sensibili parte comparabilem? potest igitur angulus Z B δ æqualis supponi angulo Z B F; quo concesso reliqua fluent eodem tenore, quo præcedentia. Quin unà rationem exhibuimus suppositionis, quæ passim ab Opticis accipitur; ità tamen precariò, non ut subinde nullum in audientibus scrupulum relinquat; nec ut semper adsensu firmo concedatur.

XI. Ità primarias istas circa radiorum inflectionem Hypotheses (vel Axiomata malitis, aut Theoremata) quibus omnis incumbit Optica cujuscunque

cujuscunque generis scientia, qualitercunque declarare studuimus, & è principiis admodum affinibus elicere; modo, meâ sententiâ saltem, omnium qui legenti se vel cogitanti suggesserunt, simillimo veri, cúmque tam rationibus Mechanicis, quam experimentis Physicis, & cum ipsa rerum natura congruentissimo. Neque nulla mihi tunc oboriebatur voluptas, cùm postquam inter alios ista lucis symptomata explicandi modos hic ipse semet ingesserat, eum examini subjiciens, Geometriæ legibus (aliquanto sanè præter expectationem) adeò quadrantem comperissem. Meæ tamen eum tam fusè diducendi pepercissem operæ, si quæ doctissimus *Maignanus* hisce conformia, luculentius quidem opinor & accuratius, pertractavit, priusquam hæc aggrederer contigisset inspexisse; penes quem extare multa nil dubitem (nec enim eum adhuc curiosius evolvi) supplendis his, & confirmandis accommodata. Porro fuit etiam animus, alias, quæ plurimæ traduntur, horum rationes percensere, ac perstringere (quarum mihi nonnullæ crassâ petitione laborare; multum aliæ à re proposita abludere; quædam animum subtilitate potius confundere, quàm vi constringere videbantur) verùm etiam huic exponendæ nimisquam immoratus, hactenus insinuatis contentus, omnes transiliam; illius saltem eruditissimi viri nefas fuerit non astipulari penitus, & acquiescere decreto; "qui, Deum unicum & Optimum Naturæ Architectum, hanc (ait) legem radiis diversa media permeantibus præscripsisse; ut omnes omnino radii veri, & apparentes eandem semper inter se servent analogiam. His, inquam, dimissis, succedit ut è præstructis emanantia quædam Porismata subnectamus.

LECT.

Lect. III.

I. HYpotheses Opticæ primarias, & fundamentales quasi leges expofuimus hactenus, & excussimus quomodocunque: Sequitur jam ut ex iis emergentia quædam (ad apparentiarum causas tam verè quàm expeditè discernendas conducentia) subjungamus corollaria; de cæteris quæ faciliora videntur, aut usum præ se ferunt potissimum seligentes. Radios autem jam consideramus, ut unicâ dimensione præditos (siquidem reliquæ, quibus Physicè gaudent, parùm faciunt ad computationes hìc institutas) ut lineas, inquam ceu vulgò fit, rectas concipimus à lucido quolibet aut aspectabili puncto dimanantes. Quin & cum, hoc admisso, singuli cujusque radii inflectio in superficie peragatur ad planum inflectens recta (uti constat è præmissis) cùm & nobis præsertim mox institutum sit singulorum punctorum radiationes consequentia symptòmata sic expendere, ut locos ipsorum apparentes determinemus, oculi respectu centrum habentis in ejusmodi plano uspiam constitutum; pro planis ubique rectas lineas, pro Sphæricis superficiebus peripherias circulares, pro reliquis lineas respectivè congruas, brevitati consulentes & perspicuitati, substituemus. Porrò cùm quo præcisè modo peragatur visio, quibúsque prædita sit affectionibus adhuc expositum non sit; Et de illa tamen subindè crassius aliquid ac generalius dicendis intexere fortassis ex usu fuerit, illa saltem pervulgata, post hac curiosiùs expendenda, jam προληπτικῶς adsumemus; nempe: Visibile punctum in illo radio situm apparere, qui procedens ab ipso (directè vel inflexè) centrum oculi permeat; proindéq; situm objectorum è radiorum ità transeuntium positione judicari. Majora, minora, vel æqualia videri objecta, prout ipsorum extrema puncta radiis cernuntur angulos ad oculi centrum respectivè majores, minores, aut æquales constituentibus; distinctam unius cujusque puncti visionem radiis effici modo naturali, hoc est, divergenter, oculo illabentibus; Et siqua sunt his agnata pariter obvia, seu manifesta. Quinetiam, verborum parci, vocabulis passim receptis & usitatis definiendis aut explicandis abstinentes, ipsorum supponimus intellectum.

ctum. His utcunque majoris evidentiæ causâ, prælibatis, ad corollaria quæ diximus expromenda nos conferemus è vestigio.

II. Imprimis autem (posthac quidem in decursu, quoad plures sibi parallelos, aut ab eodem puncto divergentes (vel in idem convergentes) & huic vel illi singulari, quæ tractanda veniet, superficiei incidentes (radios, singularia quotvis inflexos designandi compendia, radiationibus organicè examinandis profutura, tradituri) generales nunc aliquos incidenti cuivis proposito competentem inflexum assignandi modos proponemus; quorum adhiberi possit, qui rei natæ videbitur accommodatior. Pro reflectione. Incidat radius A B ad B; Et per B ducatur Q B reflectenti perpendicularis; & fiat ang. α B Q = ang. A B Q, vel per B ducta sit E F reflectentem tangens; & fiat ang. α B F = ang. A B E; liquetque factum esse, modo utrovis, quod requirebatur, Pro refractione vero; ducatur Q B refringenti perpendicularis, & super diametrum (in hac liberè sumptam) Q B describatur semicirculus, incidentem A B secans in R; tum adjunctâ Q R, factóque I. R :: Q R. T (terminis autem I, R hic & dehinc perpetuò proportio refractiones metiens indignitatur) circulo Q R B adaptetur Q S ipsam T exæquans; erit connexa S B protracta nempe) incidentis A B refracta. ¿ Vel: per incidentiæ punctum B ducatur E F refringentem contingens; & in hac utcunque sumpta B K sit circuli diameter, incidentem A B secantis ad R; & fiat I. R :: B R. T; & adaptetur B S = T; erit S B α ipsius A B refractus: Vel demum: In ipsa A B sumptâ utcunque diametro R B, super hac descriptus circulus secet perpendicularem Q B ad Q, vel tangentem E F in K; fiatque I. R :: B K. T. & adaptetur Q S = T; erit rursus S B α incidentis A B refractus. quorum ratio è positis inflectionum legibus admodum est manifesta. verba piget impendere. Fig. 16. Fig. 17, 18, 19.

III. Radii cujusvis incidentis inflexus inflexi vicissim incidens evadet.

Hoc plerique, diversè paullò prolatum, accipiunt, aut postulant. è præmistis autem facillimè colligitur. Idque potiùs methodi gratiâ (sicut & nonnulla quæ sequentur) quàm quia res meretur, ostendemus. Pro reflectione; Radius A B speculo E F impingens reflectatur in B α; dico radium B α permutatim in B A reflecti. Nam quoniam A B incidens reflectitur in B α, erit ang. α B F æqualis angulo ABE. Posito jam α B incidere, etiam angulus quem facit ejus reflexus cum B E æquabitur angulo α B F; proinde non alius erit ab ipso A B E quare B A ipsius α B reflexus erit. *Alhaz. VII. 4. Herig. Catop. Axiom. 2.* Fig. 1. 16.

Pro

Pro refractione vero: Incidat radius A B medio E F in B; & isthic refringatur in B α; dico permutatim radium α B regredientem in B A refringi. Nam per occursum B ducatur Q B P media dirimenti E F perpendicularis; & in hac utcunque sumpto puncto P ducatur P G ad A B protractam perpendicularis, ut & P H ad B α; & producatur α B S. Est ergo P G sinus rectus anguli incidentiæ A B Q ad radium B P; & P H sinus anguli refracti Q B S ad eundem radium B P. Cùm itaque ratio P G ad P H refractionem metiatur è superiori medio factam in inferius; etiam vicissim rectarum P H, P G proportio refractionem determinabit ab inferiori medio factam in superius. Unde si radius α B jam ponatur incidens; cùm sint P H, P G recti sinus anguli incidentiæ P B H, & anguli P B G, liquidum est ipsum H B in B A refringi.

Fig. 20.

IV. Angulo incidentiæ majori major competit angulus inflexus. (Angulum inflexum vocito, qui à perpendiculari continetur & inflexo; is proinde respectivè dicitur angulus reflexus, vel refractus. Angulus autem inflectionis (hoc est reflectionis respectivè, vel refractionis) appellatur is, qui comprehenditur ab incidente & inflexo; incidentiæ verò, nè quis secùs accipiat, apud nos angulus est, quem continent incidens & perpendicularis.) Quod propositum spectat effatum, id è positis principiis manifestè consectatur. Etenim in reflectione ipsi anguli reflexi angulis incidentiæ proportionales sunt; in refractione saltem recti sinus angulorum refractorum sinubus angulorum incidentiæ proportionantur. Unde liquido constat propositum: quorsum verba, quorsum Schemata multiplicem?

V. Cùm incidentes ad superficiem mediam sese decussant, iidem sese inflectionem passi decussabunt, eodem ordine servato, quem directè progedientes habuissent (utique sic ut perpendiculari post inflectionem propior incedat qui propior anteà fuit.)

Hæc propositio reverà non differt à præcedente; quò demirer eam à non nemine principia nostra usurpante aliunde comprobari.

Herig. Diop. 8.

VI. Angulo incidentiæ majori major convenit angulus inflectionis. Quoad reflectionem, res extra dubium evidens est; angulus enim reflectionis incidentiæ majori conveniens eum planè continet, qui minori incidentiæ respondet. Pro refractione vero: sit recta Q B P refringenti perpendicularis; incidant autem radii A B G, D B H (scilicet AB obliquius

obliquius quàm D B.) Horum verò refracti sint B α, B δ; dico angulum ς B α majorem esse angulo H B δ. Nam ad B P in perpendiculari liberè sumptam diametrum constituatur semicirculus B G P; cui occurrant ipsæ A B, D B protractæ ad G, H; nec non ipsæ B α, B δ punctis α, δ. Fiat autem angulus G B K æqualis angulo H B δ, vel arcus G K arcui H δ; connectatur etiam recta δ G, secans ipsam P K in X, ducaturque denuò subtensæ G δ, H δ. Jam ob angulos P G δ, P H δ pares (arcui quippe P δ insistentes ambos) & angulos G P K, H P δ ex constructione quoque pares, erunt triangula G P X, H P δ inter se similia. Quapropter erit P G . P X :: P H P δ. est autem è lege refractionum P H . P δ :: P G . P α. quare P G . P X :: P G . P α: unde P X = P α. est autem P X minor quàm P K (quia tota subtensa G δ intra circulum jacet.) Quare P α minor est quàm P K; adeóque P K secabit angulum G P α. quamobrem arcus G α major erit arcu G K, hoc est arcu H δ. & idcircò major erit angulus G B α angulo H B δ: Q. E. D. Fig. 21. Fig. 22.

Procedit hæc demonstratio quoad casum, ubi I $\sqsubset$ R (vel cùm radius è medio rariori densius ingreditur) at exinde quoad alterum quoque casum facilè deducitur conclusio. Nam si vicissim α B, δ B concipiantur incidentes, erunt ipsæ B A, B D earum refractæ; ac etiamnum anguli α B G, δ B H erunt anguli refracti.

Hujusce Theorematis apud *Herigonium* habetur alia demonstratio. Confer sodes, & utramvis elige. Nos quam res obtulit posuimus. *Diopt. Prop.* 4.

VII. In isto refractionis casu, quum I minor est quàm R, si anguli incidentiæ, puta anguli D B Q, rectus sinus P H, ad sinum totum se habeat ut I ad R; nullus incidente D B obliquior radius medium E F refractus ingredietur, aut penetrabit. Fig. 23.

Nam penetret (si fieri potest) obliquioris alicujus A B G refractus B α. Erit ergo P G . P α :: (I . R ::) *P H . P B. est autem P G major quàm P H. ergo P α major erit quam P B. quod planè fieri nequit. Ergò A B non refringetur in medium ipsi E F subjectum. * *Hypoth.*

VIII. Angulus incidentiæ major ad angulum suum refractum majorem habet rationem, quam angulus incidentiæ minor ad refractum suum.

Erit scilicet (in figura numeri Sexti, cujus huc apparatus transferatur) ang. G B P . α B P . $\sqsubset$ ang. H B P . δ B P. Nam triangula Fig. 21, 22.

GPα, HPδ ità disponantur, ut latera PG, PH sibi congruant (unde major angulus GPα minorem HPδ comprehendet) tum centro P per δ describatur circulus EδF ipsas PG, Pα secans punctis F, E; item connexâ EH, centro H per δ transeat circulus HMN ipsas HP, HE secans punctis N, M; denuò connexa Eδ cum PG conveniat in L. Estque jam ang. αPδ . ang. δPH :: sector EPδ . sector δPF ⊏ triang. EPδ . triang. δPL :: Eδ . δL :: triang. EHδ . δHL ⊏ sector MHδ . sector δHN :: ang. EHδ . ang. δHP . est igitur ang. αPδ . ang. δPH ⊏ ang. EHδ . ang. δHP . ergóque compositè ang. αPG . ang. δPH ⊏ ang. EHP . ang. δHP . permutandóque ang. αPG . ang. EHP ⊏ ang. δPH . ang. δHP . est autem HP . PE :: HP . Pδ :: I . R :: GP . Pα . adeóque EH ad αG parallela; vel ang. EHP = ang. αGP . ergò erit ang. αPG . ang. αGP ⊏ ang. δPH . ang. δHP . hoc est ang. αBG, αBP ⊏ ang. δBH . ang. δBP. vel componendo ang. GBP . ang. αBP ⊏ ang HBP . ang. δBP. Quod erat demonstrandum.

Corol. 1. Ang. αBG . ang. αBP ⊏ ang. δBH . ang. δBP.
2. Ang. αBG . ang. PBG ⊏ ang. δBH . PBH.

Opportunum est hoc Theorema conciliandis cum experientia propositis refractionum legibus. Ut demirari subeat nuperrimum Opticæ scriptorem, virum alioqui diffusè doctum, hujusmodi ratiocinio leges istas impugnâsse: "In majoribus tamen angulis inclinationis (ipsissima sunt ejus verba) falsum esse constat (principium nempe nostrum;) in his enim angulus refractionis major est subtriplo anguli inclinationis; quod mihi aliisque ex luculentis experimentis compertum est. Hæc, inquam, ille αὐτολεξεί. Quasi verò dixisset; numeri 6 & 4 simul accepti non conficiunt 10, quia numerum efficiunt majorem quam 8. planè similis est discursus; non ovum ovo similius. Nam in refractionibus ex. gr. ad vitrum factis si ponatur ad quamvis inclinationem (puta graduum 15) quòd sit angulus refractionis subtriplus anguli inclinationis (quem ille vocat, incidentiæ nos angulum appellare solemus) necessariò, sicuti modò demonstratum est, è principio nostro consequetur, quòd ad aliam quamcunque majorem inclinationem refractionis angulus major erit subtriplo anguli inclinationis; nominatim acceptâ graduum 30 inclinatione juxta dictum principium institutus calculus angulum præbebit refractum 19. 24′; angulúmque proinde refractionis 10. 36′, qui 30 graduum trientem exuperat. Quare cùm Clarissimus vir Hypothesin hanc (à

Cartesio

Cartesio quidem primò repertam, (sed ab aliis plerisque recentioribus opticis *Mersenno*, *Herigonio*, *Hobbio*, *Maignano*, quin & ipso ejus consodale doctissimo *Ricciolo* susceptam & approbatam; quam & certè hujus Scientiæ non parum interest veram deprehendi) labefactatum iret; eam potiùs imprudens experientiæ suffragio communivit. Quinimo si quid insit huic principio vitii, illud potius erit, quod in maximis inclinationibus refractionis angulos exhibet apparentibus aliquantillo majores; quæ tamen discrepantia num ipsius legis hujus, an experimentorum defectui, vel accidentariis quibusdam intervenientibus causis adscribi debeat, haud facilè pronunciaverim. Nec enim fortassis cognata reflectionis lex, à nemine non admissa, experimentis omnibus præcisò responderet. Nobis sufficiet quòd in reliquis inclinationibus, mediis præsertim, dicta lex experientiæ, quam præferunt authores, perquam consentanea reperitur; addo, quòd ab ea deductæ conclusiones cum experientia mirè conspirant; nec ab ea quòd animadvertere potuerim, unquam discordant. Eam proinde (cùm alia probabilis haud suppetat, Geometricis, ratiociniis præsternenda) non verebimur ubivis ut ratam sumere, ac adhibere; satis certi (apud nos saltem) in elicitis ab ea conclusionibus haud omnino quicquam notabilis erroris emersurum.

IX. Obiter hîc & παρεμβατικῶς problemation quoddam interseram (quia Schema num. 6. superius ei gratis inserviet, ejusque constructio è superiore constructione derivatur.) Per datum in refringente punctum (B) incidentem ducere, cui datus conveniat angulus refractionis. Ducatur B P refringenti perpendicularis (hanc autem duci posse supponimus, aut postulamus) & ad diametrum B P construatur semicirculus; & sit utcunque P G . P α : : I . R (pro P G verò præstat ipsam diametrum P B accipere) sumatúrque Arcus G K subtendens angulum parem dato. Fiat autem P X = P α. & per G, X ducta recta circulo occurrat in δ. demum accipiatur Arcus δ H = G K, erit ductæ B H refractus B δ (uti præcedentem discursum invertendo non difficilè colligitur) adeóque liquet factum esse quod erat propositum. Hoc præter ordinem; ergo perfunctoriè. Fig. 21.

X. Cujuscunque generis lineæ R B S incidat radius M N O ad N, sitque dictæ lineæ perpendicularis recta N C; & in hac utcunque sumpto puncto C, per hoc transeat incidenti parallela C B; quâcum conveniat ipsius M O inflexus G N K; erit in reflectione K N = K C; in refractione verò K N . K C : : I . R. (vel item, si in ipso inflexo Fig. 24, 25.

 sumatur

sumatur utcunque punctum K; & ab eo ducta K L ad perpendicularem C N parallela cum incidente conveniet ad L, erit illic K N = N L; & hic K N . N L :: I . R.)

Fig. 24, 25. Nam 1. in reflectione; quoniam ang. O N C = K N C (ex lege reflectionis.) Et ang. O N C = K C N (ex Hypothesi quòd O N, C B parallelæ sunt) erit ang. K C N = ang. K N C. adeóque K N = K C = N L: Q. E. D.

2 In refractione; ducantur C E ad N O, & C F ad N K perpendiculares (unde liquet puncta E, F existere in circulo super diametrum C N descripto) quare, connexâ E F; erunt anguli C E F = ang. F N C (eidem insistentes peripheriæ F C) æquales. Item propterea est ang. E C F = ang. F N E = ang. N K C. quare triangula E C F, N K C sunt æquiangula sibi mutuo; quamobrem est C E . C F :: K N . K C. atqui (juxta legem refractionis) est C E . C F :: I . R. qua propter erit, K N . . K C :: I . R: vel K N . N L :: I . R: Q. E. D.

XI. Quod si per N ducatur tangens U T; erit (in reflectione) etiam K T = K N; & N T angulum M N K bisecabit. In refractione verò erit K T ad K N, ut co-sinus anguli refracti, ad cosinum anguli incidentiæ. Quæ saltem ad noto, ceu Lemmatica.

XII. Ex his facilè deducantur Conicarum Sectionum circa radiorum inflectionem satis jam pervulgatæ proprietates; at quæ fortasse per nimias ambages.

1. Demonstratæ prostant. Ut in parabola (puta R B S, cujus axis B C) incidat M N O axi B C parallelus; ejusque reflexus sit N K; erit igitur (ex ostensis) K N = K C. at si punctum K ponatur umbilicus parabolæ; erit etiam indè (juxta notissimam hujusce curvæ proprietatem) K N = K C. quare paralleli radii reflexus necessariò per umbilicum transibit; qui propterea non immeritò quoque *focus* appellatur.

Fig 26. 2. Item *in ellipse*, cujus axis B D, foci H, K, si ad quodvis curvæ punctum N à focis ducantur rectæ H N, K N; satis celebre est, quòd perpendicularis C N angulum H N K bisecabit. Unde N H . N K :: H C . C K . & componendo N H + N K . N K :: H K . C K . vel B D . N K :: H K . C K . vel permutando B D . H K :: N K . C K. quare si talis fuerit ellipsis, ut sit B D . H K :: I . R. etiam erit N K . C K :: I . R verum si incidens M N ad B D parallelus refringatur in N K; erit (juxta mox ostensa) etiam N K . C K :: I . R. patet itaque quòd ipsius M N refractus per focum K transibit, Quid plura?

3 Non

3. Non absimiliter in *Hyperbola*, (cujus itidem axis B D, foci H, K; reliquisque velut anteà præparatis) ostendetur fore perpetuò N K. C K : : B D. H K. unde si fuerit (ex *Hyperbolæ* constructione) B D. H K : : I. R. erit etiam N K. C K : : I. R. quod si radius M N ad C B parallelus refringatur in N K; hoc idem accidet, ut nempe sit N K. C K : : I. R. quare radii M N refractus per *Hyperbolæ* focum transibit. Fig. 27.

4. Quòd verò ab *Ellipsis* aut *Hyperbolæ* cujusvis focorum alterutro quilibet curvæ incidens radieus in alterum reflectatur, admodum facilè dilucescit. Nam in ellipse, perpendicularis N C, in *Hyperbola*, tangens N T bisecat angulum H N K. unde patet propositum, Hæc extra nostras oleas posita cursim & levissimè perstringo; nec tamen ut eò multa putem desiderari.

Revertamur in orbitam; & quidem derelictis his generalissimis, ac abstractissimis, lemmatum vicem obituris, ad particularia descendamus. Ad planas verò superficies (vel earum loco propter insinuatam antehac causam subrogatas lineas rectas) inflexis obtingentia radiis primò contemplemur. Etiam quoad has Catoptricis primum, utpote facillimis, brevissimè defungemur.

XIII. 1. Parallelorum sibi radiorum (A B, M N) rectæ (E F) incidentium reflexi ($B\alpha$, $N\mu$) sunt etiam sibi paralleli. Fig. 28.

Nam quoniam A B, M N ex hypothesi sunt pàralleli, erunt anguli A B E, M N E pares. Ergò sunt anguli α B F, μ N F etiam pares. Quare rectæ α B, μ N sunt parallelæ.

XIV. 2. Sit recta A B Z rectæ reflectenti E F perpendicularis; cum hac verò promanantis ab A cujusvis radii A N reflexus α N conveniat in Z; dico forè B Z = A B. Nam ang. A N B = ang. α N F = Z N B. quare liquet triangula B N A. B N Z sibi mutuo æquilatera fore; & esse A B = B Z : Q. E. D.

XV. 3. Hinc, omnes ab uno puncto, divergentium tanquam ab altero quodam uno prodeuntes. Fig. 29.

Quoad punctum longè dissitum (suo parallelos ad sensum radios ejaculante) patet è penultima. Quoad punctum è sensibiliter finita distantia radians, ex ultima patet, quòd omnium ab A divergentium radiorum reflexi protracti concurrunt in Z; adeóque videbuntur ab eo promanare.

XVI.

XVI. Hinc punctum Z erit ipsius A (respectu oculi uspiam constituti) imago perfectissima. Siquidem imaginis vocabulo nil aliud intelligo, quàm locum à quo plures radii (quot scilicet afficiendo visui sufficiunt) similiter divergere, seu dimanare videntur, atque cùm à primariis objectis diffunduntur. Proinde cujusvis hoc modo radiantis objecti locus apparens, vel imago facilimè determinatur.

XVII. Exhinc etiam eâdem operâ, visûs imaginem adspectantis axis, seu reflexus principalis (iste nimirum qui per oculi centrum (puta O) transit,) & reflectionis (quod vocant) punctum determinantur. Connexa nempe recta O Z erit axis iste; nec non ejus cum E F intersectio N, punctum reflectionis.

XVIII. Quoad hoc reflectionis punctum unicam subjiciemus annotatiunculam. Radiante puncto A, & oculi centro O fixis manentibus recta Catoptrica E F ponatur rectæ cuidam O P parallela, sed alioquin situ indeterminata; erunt omnia reflectionis puncta in *Hyperbola*. Sit, inquam, A P ad O P perpendicularis, & bisecentur A P in X, atque P O in Y; & per X ducatur X G ad P O parallela, item per Y
Fig. 30.
ducatur Y H ad A P parallela; & X G, Y H concurrant in C; tum Asymptotis C G, C H per ipsum O descripta concipiatur *Hyperbole* R O S; hæc per omnia reflectionum dictarum puncta transibit. Nam utcunque ducta E F ad P O parallela *Hyperbola* R O S occurrat ad N; & ducantur rectæ A N, O N; dico angulum A N E angulo O N F æquari. Secet enim A P ipsam E F in B; & ducatur O Q ad A B parallela. Et, ex *Hyperbolæ* natura, est C D. C Y :: Y O. D N. quare dividendo erit Y D. C Y :: Y O—D N. D N; hoc est O Q. C Y :: N Q. D N. & permutatim O Q. N Q :: C Y. D N. item rursus ob C D. C Y :: Y O. D N. erit componendo C D + C Y. C Y :: Y O + D N. D N. hoc est A B. C Y :: B N. D N. vel permutando A B. B N :: C Y. D N. quare est O Q. N Q :: A B. B N. ergò rectangula triangula, O Q N, A B N similia sunt; & patet angulum O N Q angulo A N B æquari: Q. E. D.

Mereri saltem vel *Hyperbolæ* gratiâ videbatur hæc ejusce proprietas adnotari; quin & Analogiæ causâ versus ea quæ sequentur. Neque de reflectionibus ad plana quicquam prætereà. Ad refractiones transeo.

LECT.

Lect. IV.

I. AD ea jam accedimus quæ radiis obveniunt ad planam superficiem, vel ad rectam lineam, refractis. Quod argumentum eo diligentius prosequemur, quia nondum pro merito suo videtur satis excultum; ut & quoniam in eo tractando methodum præstituemus nobis, & quasi normam in sequentibus observandam. Ad rem.

II. Parallelorum rectæ lineæ (E F) incidentium radiorum (A B, M N) refracti (B α, N μ) sunt etiam sibi paralleli. Nam quoniam A B, M N sunt, ex hypothesi, paralleli, erunt anguli A B E, M N E pares. Itaque refractos habent angulos pares; horúmque complementa (scilicet anguli α B E, μ N F) æquantur, quare liquet refractos B α, N μ sibi parallelos esse. Fig. 31.

III. Hinc infinitè distantis, hoc est parallelos radios emittentis (infinitam ad sensum distantiam intelligo, qualis est quoad hoc stellæ cujuspiam) puncti locus apparens, aut imago per hujusmodi refractionem effecta infinitè quoque distat; quippe cùm hæc etiam per radios parallelos adspectetur. Itaque situs ejus respectu visûs ubivis positi facilè determinatur. Sit oculi puta centrum O; & A punctum radians immensè dissitum; connexáque A O refringentem E F secet in G; sitque radii A G refractus G α; per O verò ducatur O B Z ad α G parallela; in hac ad infinitum protensa (velut ad Z) apparebit punctum A. Cùm enim radii A G, A B sint (ad sensum) paralleli, etiam ipsorum refracti erunt paralleli. Quare cùm G α sit refractus ipsius A G, erit B O, ad G α parallela, etiam radii A B refractus. Ergò punctum A in recta O B protensa apparebit. Quoad hujusmodi radiationem nil succurrit aliud; itaque de propinquo radiantis puncti symptomata contemplemur. Fig. 32.

IV. Sit recta A B rectæ refringenti E F perpendicularis; in qua sit punctum radians A, ab E F haud ad sensum longè remotum; ab hoc Fig. 33.

autem.

autem procedentis cujusvis radii (ceu A N) refractus N α cum ipsa A B
Lect.3. num.9. (protractus utique, vel retractus) conveniat in K; dico fore N K. N A :: I. R. (Neque non inversè, si fuerit N K. N A :: I. R; erit K N α ipsius N A refractus.)

Hoc è superius ostensis immediatè consectatur. Et hinc etiam satis apparet, quoniam (id quod bene notetur, ut passim in sequentibus assumendum) angulus N A B, æquatur angulo incidentiæ; (quippe cum is complementum sit anguli A N B;) & angulus N K B (complementum videlicet anguli K N B) æquatur angulo refracto. Cùm ita-
Fig. 34, 35. que sit hinc sinus anguli N A B (vel anguli deinceps N A K) ad sinum anguli N K A, ut I ad R; etiam in triangulo N A K latus N K ad latus N A sese habebit ut I ad R. Quod E. D. Quinetiam si latera N K, N A se habeant ut I ad R; etiam dictorum angulorum sinus ità se habebunt; unde constabit ipsam K N α ad A N pertinere.

V. Hinc particularis emergit expeditissimus modus hujusmodi quotcunque refractos designandi. Nempe per radians punctum A ducatur A B refringenti E F perpendicularis; & fiat A B. Z B :: R. I; tum per Z ducatur recta G H ad E F parallela. Proponatur jam quilibet incidens A N, cui conveniens designandus est refractus. Eum sic dedesignaveris. Protrahatur N A (si opus) ut cum G H conveniat in S; & centro N per S describatur circulus ipsam A B secans in K (secabit utique si refractus aliquis ad incidentem A N pertineat) erit connexa K N, protractáque radio A N debitus refractus. Etenim est K N. A N :: S N. A N :: Z B. A B :: I. R :: K N. A N. unde liquet (è præcedente) propositum.

VI. Exhinc etiam hujusmodi refractionis præcipua symptomata perfacili colliguntur Negotio; quæ seorsim acceptis, & quæ secum mutuò collatis accidunt refractis; hoc imprimis: In primo casu (quum nempe refractio fit è rariori in densius, seu quum I ⊏ R) concursus refractorum cum recta A B (quam subinde radiationis hujus axem appellare licebit) supra punctum Z existit. Nam connexâ N Z; quoniam ang. N Z S recto B Z S major est, erit N S (vel N K) ⊏ N Z; adeoque B K ⊏ B Z. Item, in secundo casu (quum media contrariè se habent) dictus concursus infra punctum Z existit. Etenim rursus connexâ N Z; est ang. N S Z recto A Z S (interno) major, adeóque N Z ⊏ N S, vel N K; & ideò B Z ⊏ B K.

VII. Hinc liquet punctum Z esse limitem ultra vel citra quem (re-
Fig. 35. spectivè) omnes refracti cum axe A B concurrunt. Quinimò quòd ipsius

ipsius perpendicularis A B (quasi) refractus in ipsum punctum Z terminatur. Porro:

VIII. *Lemma*: sit A B ad E F normalis, & à duobus in A B sumptis utcunque punctis A, I (quorum A proprius ipsi B) ad duo puncta quævis M, N in ipsa E F acceptis (quorum verò M sit ipsi B vicinius) connectantur rectæ A M, A N ; & I M, I N ; dico fore A N . A M ⊏ I N . I M.

Nam centro N per A describatur circulus P A O R (rectas I M, I N intersecans punctis O, R) & per R ducatur R T ad E F parallela, secans I M in S. Et ob angulum N R T obtusum, patet rectam R T extra circulum totam excidere; unde S M ⊏ (O M ⊏) A M. adeóque A N . A M ⊏ A N : S M :: R N . S M :: I N . I M. liquet igitur esse A N . A M ⊏ I N . I M: Quod E. D. Hinc

Si duorum radiorum A M, A N (quorum hic obliquior) refracti M α, N α cum axe A B conveniant punctis I, K, erit in primo casu I B ⊐ K B; in secundo I B ⊏ K B. Etenim connexâ I N, est in primo casu, N K . M I :: N A . M A ⊏ N I . M I. adeóque N K ⊏ N I. unde B K ⊏ B I. ast in secundo, N K . M I :: N A . M A ⊐ N I . M I quare N K ⊐ N I, & indè B K ⊐ B I. Fig. 37.

IX. *Coroll.* Refractorum in primo casu concursus extra angulum A B N versantur; in secundo, intra eundem. Sed hæc eadem in decursu liquidius, ac multifariàm constabunt.

X. Porrò, bina quoad hos casus *Theoremata* subjiciemus, usus haud contemnendi.

1. Si fiat (in primo casu) Y B . A B :: I . √Iq − Rq. sit autem cujusvis incidentis A N refractus K N α; & connectatur Y N: erit K B . Y N :: √Iq − Rq . R. Fig. 39.

Nam ob Y Bq . A Bq :: (a) Iq . Iq − Rq. erit per conversionem rationis Y Bq . Y Bq − A Bq :: Iq . Rq :: (b) K Nq . A Nq. & permutando Y Bq . K Nq :: Y Bq − A Bq . A Nq. componendóque Y Bq + K Nq . K Nq :: Y Bq + B Nq . A Nq. (nempe Y Bq − A Bq + A Nq = Y Bq + B Nq; quoniam A Nq − A Bq = B Nq) Quarè rursus permutando est Y Bq + K Nq . Y Bq + B Nq :: K Nq . A Nq. dividendoque K Nq − B Nq . Y Bq + B Nq :: K Nq − A Nq . A Nq; hoc est K Bq . Y Nq :: Iq − Rq . Rq: Q. E. D.

(a) Hypoth.
(b) 4 hujus.

XI. *Corol.* 1. Hinc si duo refracti $M\alpha$, $N\alpha$ cum Axe AB conveniant in I, K; & à puncto Y ad incidentias ducantur rectæ YM, YN;

Fig. 40. erit KB. IB :: YN. YM. Nam KBq. YNq :: Iq − Rq. Rq :: IBq. YMq. quare permutatim KBq. IBq :: YNq. YMq.

XII. 2. Hinc etiam si refracti MI, NK conveniant in X; & demittatur XP ad AB parallela; & huic protractæ MY, NY occurrant in R, S; erit NS = MR. Nam XP. SN :: KB. YN :: IB. YM :: XP. RM. cum itaque sit XP. SN :: XP. RM; erit SN = RM.

XIII 2. In secundo casu; sit cujusvis incidentis AN refractus $KN\alpha$; & fiat YBq. KBq :: Rq. Rq − Iq; & connectatur YN; erit ABq. YNq :: Rq − Iq. Iq.

Nam quia KBq = KNq − BNq = KNq − YNq + YBq: erit (hypothesin persequendo) YBq. KNq + YBq − YNq :: Rq. Rq − Iq :: ANq. ANq − KNq. & per rationis conversionem

Fig. 41. YBq. YNq − KNq :: ANq. KNq. (est autem YBq = YNq − BNq = YNq − ANq + ABq, ergò YNq − ANq + ABq. YNq − KNq :: ANq. KNq (hoc est, antecedentes & consequentes adjungendo) :: YNq + ABq. YNq. quare dividendo ANq − KNq. KNq :: ABq. YNq hoc est Rq − Iq. Iq :: ABq. YNq: Q. E. D.

XIV. *Corol.* 1. Hinc rursus, si duo refracti $M\alpha$, $N\alpha$ secent axem punctis I, K; ipsos autem se decussent puncto X; & fiat YP. XP :: R. $\sqrt{Rq - Iq}$. & per Y ducantur MYR, NYS; erit NS = MR.

Nam SB. KB :: YP. XP :: R. $\sqrt{Rq - Iq}$. quare AB.

Fig. 42. SN :: $\sqrt{Rq - Iq}$. I item RB. IB :: YP. XP :: R. $\sqrt{Rq - Iq}$. quare AB. RM :: $\sqrt{Rq - Iq}$. I. ergò AB. SN :: AB. RM. quare SN = RM.

2. Hinc SB. RB :: KB. IB.

XV. Porrò, notandum est quò radii ab A manantes axi viciniores sunt eò refractos ipsorum spissiùs incedere; seu minora fore concursuum interstitia; ut nempe si in refringente EF sumantur æqualia intervalla MN, NO; & radiorum punctis M, N, O incidentium refracti $M\alpha$, $N\alpha$, $O\alpha$ cum axe concurrant punctis I, K, L; erit intervallum

tervallum I K minus ipso K L; seu generalius efferendo, libere sumptis ipsis M N, N O; erit I K . K L ⊐ M N . N O. hoc verò non aliter, opinor, elegantius quam ex adjunctis uno, vel altero Theoremate constabit. Fig. 43.

XVI. In primo casu; sit (ut antehac) Z B . A B :: I . R; superque diametro Z B constituatur semicirculus; cui à puncto B adaptetur B D = B A; & per puncta Z, D ducta recta refringenti occurrat in Y; tum ad semiaxes B Z, B Y (centro nempe B, vertice Z) describatur Hyperbole H Z G; in hac autem sumpto quolibet puncto S ducantur S N ad A B, & S K ad E F parallelæ. Denique ducantur A N, K N α; erit K M α incidentis A N refractus. Fig. 44.

Nam ex *Hyperbolæ* natura est K B q — Z B q . B N q :: B Z q . B Y q :: Z D q . B D q (hoc est) :: Z B q — A B q . A B q. quare componendo K B q — Z B q + B N q . B N q :: Z B q . A B q hoc est K N q — Z B q . B N q :: Z B q . A B q. permutandóque K N q — Z B q . Z B q :: B N q . A B q rursusque componendo K N q . Z B q :: A N q . A B q. denuóque permutando K N q . A N q :: Z B q . A B q :: I q . R q. quare K N . A N :: I . R. ergo K N ipsius A N refractus erit: Q. E. D.

XVII. Hinc refractorum cum axe concursus (puta I, K, L) à se distant intervallis ordinatim applicatarum ad *Hyperbolam*, puta rectarum, B Z, M R, N S, O T; vel ipsarum O, Z I, Z K, Z L. Hæ verò (ceu passim notum, & à nobis aliquando generatim circa cunctas hujusmodi curvas ostensum est) in majori ratione crescunt, quam ipsæ B M, B N, B O; nempe Z L . Z K ⊏ L T . K S. & Z K . Z I ⊏ K S . I R. quare satis liquet propositum. Enimverò prope verticem Z ordinatarum differentiæ perquam exiguæ sunt; ut bene multorum perpendiculari A B adjacentium radiorum refracti velut è puncto Z manare videantur; utcunque circa ipsum præcipuè constipantur.

XVIII. Haud absimiliter, in secundo casu, super ipsa A B describatur semicirculus; & huic accommodetur B D = B Z; & connexa protractáque A D refringenti occurrat ad Y; tum centro B semiaxibus B Z, B Y describatur ellipsis H Z G; & in hac accepto quocunque puncto S ducantur S N ad Z B, & S K ad E F parallela; connectantur denique rectæ A N, K N; erit K N incidentis A N refractus. Fig. 45.

Etenim ex ellipsis natura est K S q . Z B q — S N q :: B Y q . B Z q :: B Y q . B D q :: B A q . A D q :: B A q . B A q — B Z q . & per con-

 versam

versam rationem KSq . KSq — ZBq + SNq :: BAq . BZq . hoc est KSq . KNq — ZBq :: BAq . ZBq . quare permutando erit KSq . BAq :: KNq — ZBq . ZBq . & compositè KSq + BAq . BAq :: KNq ZBq . hoc est ANq . BAq :: KNq . ZBq . quare rursus permutando est ANq . KNq :: BAq . ZBq :: Rq . Iq . itaque AN . KN :: R . I . unde patet KN ipsius AN refractum fore : Q . E . D.

XIX. Exhinc, ut in priore casu, patet quòd distantiæ (ZI, IK, KL) concursuum æquantur differentiis ipsarum ZB, RM, SN, TO ordinatarum ad ellipsim. Et quod ZI, ZK ⊐ IR . KS . &c differentiæ porrò dictæ circa verticem ellipsis Z admodum exiguæ sunt, adeóque propinquiorum axi radiorum refracti circa Z densè congregantur, & velut ab eo procedere videntur.

XX Ex his tandem universis colligitur quòd puncti radiantis A imago (respectu scilicet oculi centrum O habentis uspiam in axe AB constitutum) circa punctum Z consistet. Sit enim. D δ diameter pupillæ (illa nempe quæ in plano EAFO) & per hujus extrema transeant radiorum AM, Aμ refracti IMD, Iμδ ; sanè patet quòd nullius obliquioris (ceu ipsius AN, vel Aν) refractus oculum ingredi poterit ; quin universi tales aliorsum digredientur, adeóque nec illi quicquam advisum attinebunt, eique nil omnino conferent efficiendo quaquam, nedum determinando. Quinimò cùm visus a solis afficiatur radiis intra spatium ZI axem intersecantibus, adeóque velut ab eo procedentibus, intra spatium ZI necessariò versabitur imago ; quia verò ex his qui circa Z concurrunt oculo rectiùs incidunt, ideóque præcipuâ vi pollent ; cùm & ii (uti mox ostendimus) spissiores sint, & præ cæteris consertim incedant (id quod etiam nonnihil illorum vim adauget) cùm etiam iidem faciliùs ab oculo rursus in idem punctum recolligantur (id quod posthac aliquatenus ostendemus ; & interim ex eo fit verisimile, quòd res per exiguum foramen spectatæ, radiis scilicet obliquioribus exclusis, longè distinctiùs, apprehenduntur) quoniam, inquam, hæc ita se habent, iis perpensis omninò rationi consentaneum est objectum videri ceu radios projiciens à puncto Z. hoc est ejus imaginem inibi consistere Addo, quòd ob exilem pupillæ latitudinem, & propter aliquantam oculi distantiam à refringente ; totum spacium ZI perquam angustum erit, & instar puncti merebitur existimari : quæ cuncta propositum abunde videntur confirmare.

Fig 46.

XXI. Accedit.

XXI. Accedit tamen ei penitiùs astruendo etiam experientia · quâ nempe compertum habetur; quòd objectum (velut A) in aquâ situm, oculo (O) perpendiculariter imminenti, ita distans videtur (puta ad Z) ut sit perpetuò A Z quadrans ipsius A B, id quod ratiociniis præcedentibus exquisitè congruit. Etenim cum experientia docuerit in refractionibus ex aqua factis in aërem, *Sinum anguli Incidentiæ ad Sinum anguli Refracti* se habere circiter, ut 3 ad 4; erit juxta constructionem præmissam ipsius Z B ad A B ratio subsesquitertia; seu hæc ad illam ut 3 ad 4. Quare nihil erat causæ cur hoc fretus experimento Præclarissimus vir receptam de refractione sententiam impugnaret, & exploderet; at potiùs ut ei promptiùs accederet, aut firmius adhæreret, expositi Phænomeni causam adeò perspicuam, adeo necessariam suggerenti. quinimo perpendicularem ipsam (quod adeò valde vult, acriterque contendit) è superiore doctrinâ quadantenus infringi, decurtarique (terminatione saltem refringi, tametsi non situ) patebit ad illam attendenti. *Is. Voss.*

XXII Habetur itaque definitus imaginis situs, ob oculum in axe collocatum. Succedit ut idem præstemus oculi gratiâ extra ipsum ubicunque siti. Sed priùs unum est quod opportunè moneamus, antea prætermissum, eâdem scilicet operâ quoad radios convergentes simul ac divergentes confici negotium. Erunt enim ad punctum quodvis (ceu A) tendentium radiorum refracti prorsus iidem cum illis, qui divergentibus ab A convenient, modò cæteris manentibus invariatis (refringente scilicet & puncto A designatum situm retinentibus) media concipiantur transposita. Nimirum, exempli causâ, si N K sit refractus radii B N versus A tendentis è raro in densum; erit itidem N H ipsi K N in directum politus radii A N B, è raro in densum Fig. 47. (quæ nempe prioribus homogenea sint) procedentis refractus. Itaq; quæ de radiis divergentibus ostensa sunt, ea convergentibus, adhibito justo moderamine, pariter adaptari possunt; in horum locum divergentes respectivè congruos subrogando. Quare nedum in hoc casu, sed in omnibus qui sequentur, de radiis solummodò divergentibus instituemus sermonem; eò subintelligentes etiam convergentes ex hac regula determinabiles referri. Quæ sanè compendio deserviens observatio, generalibus istis supra delibatis meruit intertexi; nec enim ad hanc solam quæ præ manibus, ast ad omnes æquè, qualibet ad superficies, radiorum inflectiones se extendit.

XXIII. Adsimilem & indè consequentem (cum paralleli à puncto proveniant

proveniant infinitè dissito) circa radios parallelos observatiunculam, compendio servientem, etiam hic tempestivum fuerit adjungere; parallelorum nempe Convexis incidentium partibus radiorum inflexi, quoad positionis directionem, iidem erunt cum inflexis ipsorum concavis partibus incidentium; modò transposita concipiantur media. Quare parallelorum radiationes examinando nihil erit opus convexas partes à concavis distinguere; seu exinde casus multiplicare. Res è posthac dicendis clarior evadet. His admonitis, de tabula jam manum; & quam proposuimus instituendam proximè disquisitionem sequenti reservamus.

LECT. V.

I. EO jam provecti sumus, ut radiantis (à sensibiliter finita distantia) puncti locum apparentem investigemus, illum nempe qui resultat, è peracta ad planam superficiem refractione; nec non respectu visus extra radiationis axem constituti. Quorsum imprimis spectat, ut rectam determinemus lineam, in qua locus ille versatur; tum ut singulare designemus in illa recta punctum, circa quod exquisitè consistit. Utriusque quæsiti gratiâ conficiendum, (imo penitius excutienendum) venit hujusmodi *Problema*:

II. *Dato puncto A, in positione datam rectam E F radiante, designandus est incidens, qui per alterum transeat datum punctum.*

Fig. 48, 49. III. Si datum punctum alterum (puta jam K) in recta A B existat, ad refringentem E F perpendiculari Problema planum erit, ac ità facilè conficietur. In primo casu (quando scilicet I $\sqsubset$ R) fiat A B . Y B :: $\sqrt{}$ Iq — Rq . I. itemque fiat K B . T :: $\sqrt{}$ Iq — Rq . R; tum centro Y intervallo T descriptus circulus ipsam E F secet in N; connectantunrque A N, K N; erit K N α ipsius A N refractus.

Itidem in secundo casu (cùm I $\sqsupset$ R) fiat K B . Y B :: $\sqrt{}$ Rq . — Iq . R. A B . T :: $\sqrt{}$ Rq — Iq. I. centroque Y intervallo T describatur circulus ipsi E F occurrens in N; eritque rursus K N α ipsius A N

A N refractus. Hæc autem è supra positis Theorematis abunde constant. 10 & 13 Lect. 4.

IV. Verum extra casum hunc, & particulares alios nonnullos (quos hic certè nil attinet commemorare) generatim & illimitatè conceptum Problema solidum est, pluresque duabus solutiones admittit; id quod facilè perspicietur concipiendo punctum datum (puta X) in primo casu extra angulum A B F jacere (vel intra eundem, in secundo) quo posito liquet è præcedentibus obtingere posse nonnunquam, ut duorum ad partes B F incidentium refracti concurrant ad X; quin & alterius unius ad partes B E incidentis refractum etiam per idem X transire quod cùm subinde, dico, contingere possit, indè certò consequetur *Problema* solidum esse. Fig. 50.

V. Pro cujus solutione, primùm adnoto vix ullum *Problema* dari (præsertim è difficilioribus) quod non peculiarem lineam naturâ sibimet appropriatam habeat, cujus descriptione quàm expeditè construatur; & quidem ità, ut simul indolem suam prodat; possibilitatem, inquam, & impossibilitatem suam; determinationes, & limitationes necessarias; casuum & solutionum varietatem apertè monstret, & velut ob oculos repræsentet. In cujus qualis qualis observationis specimen (alia quædam postmodùm exhibituri) imprimis lineam proponemus hujusce Problematis executioni peculiariter accommodatam, hoc modo promptè describendam.

VI. Per radians punctum A ducatur A R S refringenti parallela; eidémque perpendicularis A B utrinque protendatur indefinitè. Item per datum alterum punctum X protendatur X R ad A B parallela: Quinetiam facto A S. A R :: I. R; per S extendatur S U ad A B parallela. Quibus stantibus per A quotcunque transeant rectæ secantes ipsam S U punctis H; & centro X, intervallis ipsas A H exæquantibus, describantur circuli secantes perpendicularem A B punctis K; demum per X, K ductæ lineæ cum ipsis H A conveniant in N. Per ejusmodi quæcunque puncta transibit proposito nostro deserviens linea (A N N) quam suscepimus describendam; cujusce nimirum cum refringente F F intersectiones ipsissima sunt incidentiæ puncta, quæ indagamus (hæ autem ad unas rectæ A B partes (veluti ad F) aliquando duæ erunt; subinde tantùm una, cùm E F sic effectam curvam tangit; quandoque nulla, cùm E F ultra tangentem dictam jacet; ad alteras saltem una erit; quæ satis attendenti manifesta futura subnoto tantum Fig. 51.

tum

Fig. 51. tùm & levi pede prætereo; quoniam aliunde mox apparitura) sit, inquam, ejusmodi quælibet intersectio N; dico fore XN, ipsius AN refractum. Etenim est I. R :: AH. AT. hoc est (quoniam AH, KX sunt ex constructione pares) I. R :: KX. AT :: NK. NA. unde manifestum, è præmonstratis, est propositum.

VII. Veruntamen hujusmodi constructiones *Geometrarum* usus aut non libenter admittit, aut alias saltem exigit per lineas vulgo notas, atque receptas; itaque consuetudini morem gerentes rem aliter conficiemus; huc utique faciens sequens *Problema Lemmaticum* præmittentes: Dato angulo recto XPF; punctóque quovis Y; per hoc rectam ducere dati anguli cruribus occurrentem, sic ut ab iis intercepta sit æqualis datæ rectæ T. || Expeditissimè quidem perficitur hoc ope

Fig. 52. *Conchoidis* alicujus polo Y descriptæ; sed enim quoniam & iste modus haud ità Geometricus censetur; adhuc iisdem Geometris obsequentes ità propositum exequemur. Ducatur YB ad PF perpendicularis; & *Asymptotis* PX, PB ducatur *Hyperbola* per Y transiens (si quidem punctum Y existat extra angulum datum, aut istius opposita (sc. punctum Y sit intra dictum angulum) tum centro Y intervallo datam T æquante descriptus circulus *Hyperbolam* inteersecet in K; & a K demittatur KL ad BP perpendicularis; accipiatur autem BN = PL; & per NY trajiciatur recta NG. dico factum; vel esse NG parem datæ T. || Nam (ductâ YH ad PB parallelâ) ex *Hyperbola* proprietate est PL × LK = PB × BY. adeóque cùm sit ex constructione BN = PL; erit BN × LK :: PB × BY. adeóque BN. BY :: PB. LK. est autem BN. BY :: DY. DG. ergo est PB. LK :: DY. DG. quare cùm sit PB = DY. erit LK = DG. adeóque (pares LH, DP addendo, vel subtrahendo) est KH = GP. quinetiam est YH = LB = PN (communem nempe PB, vel LN addendo) Ergò patet fore YK (vel T) æqualem ipsi GN: Q. E. F.

VIII. Notandum est autem in casu, quando punctum Y intra datum angulum XPF existit, quod circulus ille centro Y descriptus subinde designatam hyperbolem binis punctis secabit (quod enim pluribus haud quoquam secabit universim haud ità pridem circa tales ad eadem convexas curvas ostendimus, quo casu patet duas obvenire propositi solutiones, aliquando rursus ille dictus circulus *Hyperbolen* continget; & tum una tantùm per Y duci poterit recta, datam T adæquans; illa scilicet omnium quæ per Y dato angulo interseri possunt minima. Quod si circulus Hyperbolæ non occurrat, *Problema* prorsus *impossibile* erit.

erit. || Sin punctum Y extra datum angulum existat, evidens est tantùm uno modo problemati satisfactum iri; quódque per alteram intersectionem, & Y, ducta recta ad angulum pertinet dato verticalem. hæc, inquam, tantillùm attendenti manifestè constabunt; nihil ut sit opus hic plura verba consumere. verùm ut in horum casuum primo constet (id quod pro sequentibus ex usu erit cognoscere) quando dictus circulus *hyperbolam* contingit; seu quando tantùm una per Y recta quantitatis ejusdem interseri possit, hoc adnectemus *Theorema*.

IX. Si à puncto quovis Y intra rectum angulum XPF existente demittantur ad ejusdem anguli latera perpendiculares YB, YD; ac inter YB, YD proportione mediæ sint rectæ BN, GD; per puncta N, Y, G transibit recta cunctarum minima, quæ per Y ductæ angulum XPF subtendere possunt. Fig. 54.

Quòd NYG sit una recta patet, quoniam est YB. BN :: GD. DY (ex constructione nimirum) porrò per Y transeat alia quæcunque recta LYM; & NH ad GN, MH ad PF perpendiculares concurrant in H. item HA ad NG parallela ducatur; & GS ad PF; denuóque connectatur GH. Jam patet triangula GDY, YBN, HMN, HMR similia fore; quódque propterea est MN, MR :: MNq. MHq :: DGq. YDq. item (ob BN, DG, YD ∺) est BN. YD :: DGq. YDq. hoc est YN. YG (vel MN. GS) :: DGq. YDq. ergò est MN. MR :: MN. GS. adeóque MR = GS. itaque major est GS ipsâ MT; abeóque rectæ GH, LM protractæ concurrent; puta ad Z. ergò LM. GH :: LZ. GZ. verùm propter angulum LGH recto P majorem, est LZ ⊏ GZ. quare LM ⊏ GH. ast ob angulum rectum GNH est GH ⊏ GN. quare magis est LM ⊏ GN. eodémque modo quævis per Y ducta major ostendetur ipsâ GN: Q. E. D.

X. Hinc etiam si GN sit in ratione YB ad YN quarta proportionalis; erit GN minima. nam indè consequetur fore YB, BN, GD, YD ∺. Etenim erit YNq. YBq :: GN. YN. & dividendo BNq. YBq :: GY. YN :: DY. BN. ac indè YBq × DY = BNcub, vel $DY = \frac{BN\,cub}{YBq}$. itáque DY est quarta proportionalis in ratione YB ad BN.

XI. Subnotari potest autem, quòd minimæ GN propiores remo-

 tioribus

tioribus minores sunt. & quod cuivis eâ majori binæ pares interseri possunt, ad ejus utramque partem singula. nimirum hæc è superiori constructione luculentè patent; pauxillum expende Sodes; & perspicies; operámque meam non desiderabis.

XII. His præstratis ad *Principale construendum Problema* revertimur; & reliqua detexenda. scilicet imprimis à dato puncto A prodiens radius est designandus, cujus refractus per datum punctum X transibit. || hoc ità conficitur. per A, X ducantur refringenti perpendiculares A B, X P. tum in primo casu fiat A B. Y B :: √ I q — R q. I. neque non fiat X P. T :: √ I q — R q. R. & per punctum Y transadigatur recta N G subtendens angulum A P F, & ipsam T exæquans; & connectantur A N, X N. dico factum; seu rectam X V incidentis A N refractum esse. || Etenim est X P. K B :: N P. N B :: N G. N Y. permutandóque X P. N G :: K B. N Y. hoc est X P. N G (vel √ I q — R q. R) :: K B. Y N. itaque per theorema præmissum liquet K N ipsius A N refractum esse: Q. E F.

Fig. 55, 56.

Haud absimiliter in secundo casu; fiat X P. Y P :: √ R q — I q. R; itémque A B. T :: √ R q — I q. I; angulóque A B F per Y transiens, ipsámque T adæquans inseratur recta N G; connectantúrque A N, X N; factum erit. || Nam ipsam X P protractam secet A N in S. éstque S P. Y N :: A B. G N :: A B. T :: √ R q — I q. I. unde consequitur è præmonstratis fore X N ipsius S N refractum Q. E. F.

XIII. Exhinc; & præmissa respiciendo satis dilucescit non ultra duos ad unas perpendicularis A B partes incidentium refractos in uno puncto convenire. nam (ut supra declaratum) per puntum Y (quod universis hujusmodi constructionibus commune, vel invariatum perpersistit, in primo casu quoad omnes ab A incidentes; in secundo quoad omnes per X transeuntes refractos) plures duabus sibi pares duabus sibi pares rectæ angulo recto X P F, vel A B F interseri nequeunt; adeóque nec plures refracti per ipsum X transibunt.

XIV. Porrò, cùm è dictis definita habeatur recta, in qua puncti A Imago versatur; iste nimirum refractus qui per oculi centrum transit, modo jam exposito ducendus; ipsum jam punctum determinandum venit, ad quod illa præcisè consistit; id quod etiam è præcedentibus haud difficulter eliciemus.

XV. Sumatur, in casu primo, punctum Y conditione præditum jam

jam aliquoties insinuatâ; scilicet ut sit $AB . YB :: \sqrt{Iq - Rq} . I$; & designetur quilibet refractus KN; tum continuetur ratio YB ad BN, ut sit ad has proportione quarta BP, & per punctum P ducatur recta PZ ad AB parallela; refracto KN occurrens in Z; dico nullum alium refractum per Z transire. Nam si fieri potest transeat alius ZR; & per Y traducantur rectæ NYG, RYS; è præmonstratis apparet quòd sit RS * = NG. item è prædictis manifestum est quòd RS * ⊏ NG. quæ repugnant. Fig. 57, 58. * 11. Lect. 4. * 9 hujus Lect.

XVI. Non dispari ratione, quoad casum secundum, designetur quilibet refractus KN; & fiat $KB . GB :: \sqrt{Rq - Iq} . R$; tum adnexâ GN, ad ipsas NG, GB sumatur tertia proportionalis V; & fiat NG . V :: BN . NP; & per punctum P ducatur PY ad BA parallela refractum NK decussans in Z; dico nullum alium refractum per ipsum Z meare. Nam, si neges, transeat alius ZR, & per Y trajiciatur RYS; & quoniam $ZP . YP :: KB . GB :: \sqrt{Rq - Iq} . R$. ex * antedictis apparet fore RS = NG. quinetiam ob NGq . GBq :: NG . V :: BN . NP. erit dividendo NBq . GBq :: BP . NP. hoc est NPq . PYq :: BP . NP; inde facile deducitur esse BP quartam proportionalem in ratione YP ad PN; consequenterque fore RS minimâ NG majorem. quod adversatur ostensis. itaque potiùs per Z nullus alius transit refractus: Q. E. D. * 14. Lect. 4.

XVI. Præterea, si refractum NKZ intersecet alius quilibet MI, ad rectiorem pertinens incidentem (hoc est ut incidentiæ punctum M inter B, & N jaceat) intersectio X solitario puncto Z citerior erit (seu perpendiculari KB propinquior). Nam ab X demittatur perpendicularis XQ; ipsam NG secans in γ; & (in primo casu) per M, Y traducatur recta MYH. ergò MH = Nγ. quare minima earum quæ per Y angulo XQF interseri possunt inter puncta M, N cadet (uti nuper admonitum, & adstructum). puta ad φ. ergò quum sit BP quarta proportionalis in ratione YB ad BN; & BQ quarta proportionalis in ratione YB ad Bφ; erit PB ⊏ QB; adeóque recta XQ rectis ZP, KB interjacet: Q. E. D. Fig. 59, 60.

In secundo casu, per γ trajiciatur recta MγH. ergò cùm sit $QX . Q\gamma :: PZ . PY :: \sqrt{Rq - Iq} . R$. erit HM = GN. ergò minima per γ ducibilium angulo ABF intercipienda punctis M, N intercidet; puta ad φ. quare QB quarta proportionalis erit in ratione γQ ad Qφ; & est γQ . Qφ ⊏ (γQ . QN.) :: YP . PN. &

 sim-

simplicibus triplicatas substituendo rationes, est $\gamma Q . QB \sqsubset YP . PB$. & his æquales rationes adjungendo est $QN . \gamma Q + \gamma Q . QB \sqsubset PN . YP + YP . PB$; hoc est $QN . QB \sqsubset PN . PB$. componendóque $BN . QB \sqsubset BN . PB$. ergo $QB \sqsupset PB$. unde rursus liquet rectam XQ ipsis AB; ZP interjacere: Q. E. D.

XVII. Consimili prorsus argumentatione constabit obliquiorum incidentium refractos ultra punctum Z ipsam KN intersecare.

XVIII. Quinimò rursus exertiùs apparet non nisi binos refractos in eodem puncto convenire.

XIX. Addo cum ipso KN concurrentes refractos circa punctum Z conglomerari, præsertim illos, qui ad partes F (obliquius) incidentes pertinent.

Fig. 61. Nam accipiantur, exempli causâ, sibi pares NS, ST; & sit BP quarta proportionalis in ratione YB ad BN; & BQ quarta proportionalis in ratione YB ad BS; & BR itidem quarta talis in ratione YB ad BT; & à punctis P, Q, R erectæ perpendiculares ipsam NKZ secent in Z, X, & V. patet (è mox ostensis) omnium spatio NS incidentium refractos cum NK concurrere intra ZX; nec non omnes ipsi ST incidentium refractos intra XV cum eodem convenire. porrò rectæ BP, BQ, BR se habent invicem ut *Cubi* rectarum BN, BS, BT, (vel sunt in ipsarum BN, BS, BT *ratione triplicata*: nam BP . YB :: BN cub . BY cub . & YB . BQ :: YB cub . BS cub. adeóque ex æquo BP . BQ :: BN cub . BS cub . & consimili ratione BP . BR :: BN cub . BT cub .) undè facilè monstrabitur esse PQ multo minorem quàm QR; vel ZX quàm XV (verbis parco multis in re satis manifesta). quare dicti refracti circa punctum Z spissiùs ipsum NK decussabunt.

XX. Ex his demum conficitur omnibus bene trutinatis, oculo (O) centrum habenti in refracto NK uspiam constituto, puncti A imaginem ad ipsum conditione præditum toties insinuatâ punctum Z consistere. Sit enim CD pupillæ (in plano ABC jacens) *Diameter*, *axi Optico* KN perpendicularis; & per ejus extrema C, D transeant refracti IM LR ipsi KN occurrentes punctis X, V. ex ostensis patet omnium intra spatium MN incidentium radiorum refractos intra terminos ZX principalem refractum intersecare; neque non omnes ad

spatium

ſpatium NR pertinentes intra ZV eidem occurrere; quinetiam nullius citra punctum M, vel ultra R incidentis refractum (ſeu nullum citra X, vel ultra V cum ipſo KN concurrentem) oculum ingredi poſſe. quare ſaltem imago conſiſtet intra terminos VX; ſiquidem aliunde qui videntur emanare *Radii* nihil quicquam ad viſionem conferent, aut ad eam ullatenus pertinebunt. cæterum quoniam ab VX procedentium (apparenter, inquam, procedentium) reciſſimi, vel axi propriores velut ab ipſo Z procedere videntur (ſeu à loco qui circa ipſum) ipſique proinde validiùs afficiunt oculum, & ab eo faciliùs adunari, recolligique poſſunt; cùm & ii præ cæteris confertim irruant (illi ſaltem qui ad partes NR,) quia denique propter anguſtiam pupillæ ſpatium VX haud ita magnum exiſtit; cùm, inquam, hæc ita ſe habeant, omninò rationi conſentaneum eſt, dictam imaginem circa punctum Z verſari; nec alias arbitror excogitari poſſe veriſimiles cauſas, quæ ſitum ejus determinent. *Alhazenus* quidem, & poſt eum pleraque cohors *Opticorum* ipſam ad punctum K, ubi principalis refractus perpendicularem AB decuſſat, conſtituit; verùm haud ullam rei natura cauſam ſuggerit, cur inibi ſtatuatur: unicus enim (niſi ſaltem pupilla perpendicularem ipſam AB comprehendat; oculuſque valdè ſit ei propinquus) per illud punctum means radius; afficiendo viſui minimè ſuffecturus, ingredietur oculum; eadémque punctorum intra KX ipſi K adjacentium eſt ratio; nullus ſiquidem ea permeans refractus oculum attingit; nil itaque ſubeſt cauſæ cur punctum A circa K appareat. quin adhuc à vero magis aberrat, *qui faciens NH æqualem ipſi NA puncto H affigit imaginem (huc, opinior, impulſus quia taliter in reflectione ſe rem habere perſpexit; cui ſimilis cauſa ni fallor *Euclidem*, *Alhazenum*, *Stevinum* (quanquam ipſos in diverſum euntes) horúmque ſequaces, in *Catoptricis*, in errorem egit; prout uſu non raro venit *analogias haud bene fundatas*, indiſtinctéque perceptas mortalibus imponere; ſed utcunque quod dixi magis iſta ſententia abhorret à ratione.) nullus enim in primo caſu refractorum concurſus fit infra angulum ABF; nullus extra illum in ſecundo; proindéque fortiùs hanc quæ objecimus, quam priorem *Alhazeni* percellunt ſententiam. addo quòd ſimul utraque, ſed præſertim hæc, multiplici refragatur experientiæ, multiplicique ratiocinio; pariter enim ſe res habere debuit in *Catoptricis*, ut & in *Dioptricis circularibus*; id quod manifeſtè, longéque ſecus tam ab experientiâ, quàm à ratione compertum eſt. quin hanc abunde ſubvertit ac peſſum dat quod ſupra propoſuimus experimentum, nemini non obvium; quòd nempe punctum A, oculo in ipſo perpendicu-

Fig. 62.

* D. Hobbius.

lari

lari A B constituto, non in suo loco (quod juxta dictam sententiam oportuit) ast pro mediorum diversitate, (perquam sensibili intervallo) citerius adspectatur, aut ulterius. Sed effatum hoc nostrum (eique quoad reliquos in Catoptricis, Diopticísque casus similes consona) tametsi novitium, & nullâ quod sciam hactenus auctoritate fultum, cum forsan expositum dilucidiùs, tum penitissimè dabimus confirmatum, si quando nos de imaginum natura, locóque speciatim evenerit dissertare. Mihi saltem videtur hæc Scientia quoad hanc partem suam, certè palmariam (uti reperitur hactenus tractata) perquam mutila, nè dicam admodùm vitiosa; nec aliò ferè collimamus quàm ut aliquousque suppleamus eam, ac sanemus.

Fig. 63. XXI. Proximè dictis confirmandis idoneum haud illepidum experimentum interferemus. Aquæ Superficiei R S (stagnanti, & immotæ desuper immineat objectum H G; ejus autem punctum G radat perpendiculum E F (filum puta candidum, aut stylus, cui plumbum F appenditur) videbitur itaque punctum G (oculo O) ex reflectione in ipsâ perpendiculari G B velut ad γ; at perpendiculi punctum F (admodum notabili distantiâ) citra lineam B γ aspicitur (velut ad ϕ) id quod ex sententia nostra factum oportuit; & *Alhazeni*, sequaciúmque doctrinam liquidò destruit.

XXII. Subjicio tandem ex his comparere modum genuinam refractariam quam vocant (per quam nempe recta linea repræsentatur in aquæ fundo conspicua) lineam designandi; cujus loco complures (utique non eandem omnes, ast aliam alii) Chimæram inani sunt operà prosequuti; de quà *Cartesius* ipse percontanti *Mersenno* sic

Tom. II. Epist. 73. respondit: "Non potest facilè determinari qualem figuram linea visa "in fundo aquæ sit habitura; neque enim certus est aliquis ima-"ginis locus in reflexis aut refractis, quemadmodum sibi vulgò per-"suaserunt Optici. Imò verò (tanti viri pace) cùm speciale quodvis objectum (per ejusdem generis & eodem modo terminatum medium aspectabile) similem constanter exhibeat speciem sui, simili situ dispositam, simili præditam figurâ; non video quin ex parte rei certum imago locum sortiatur; cujus certè (quoad illum qui præ manibus est casum) quotcunque puncta non difficilè poterunt è præcedentibus determinari. quinimò nullius non. ex hujusmodi planam ad superficiem refractione subnascentis phænomeni (quoad ejus intelligo figuram) causa verè, ni fallor, hinc & promptè possit assignari. verùm hæc circa planas superficies dicta sufficient; ad curvas nos proximè conferemus.||

Lect. VI.

Lect. VI.

I. ABsolutis iis, quæ radiis accidunt ad planam superficiem inflexis (observatu quæ videbantur non indigna, cumque principiis nostris cohærentia; quæ denuò viam sternebant, aut methodum aperiebant sequentibus) ad curvas jam gradum promovemus; circa quas equidem cogitâram communia quædam delibare; verùm excussâ re, tam exilem illam & abstractam deprehendo, satius ut existimem actutùm ad particularia descendere. curvarum utique principem, & ad praxes Opticas longè paratissimam, Superficiem Sphæricam aggrediar è vestigio. pro qua tamen, ob causas pridem assignatas, circulos subrogabo per oculi Sphæræque centra, pérque singula radiantia puncta trajectos. & quoad hos *Catoptrica* primò; *Dioptrica* postmodum exequemur. Ad illa.

II. Præsternemus autem λημμάτιον unum vel alterum; hoc imprimìs: Incidentium circulo radiorum obliquior est, qui magis à centro distat, vel qui minorem arcum (subsemicircularem) subtendit. scilicet obliquiùs incidit recta QRS, quàm recta MNP. Nam à centro C ducantur CN, CP; & CR; CS. & quoniam angulus RCS angulo NCP (hypothesi nimirum insistendo) minor est; patet reliquos CRS, CSR reliquos CN, P, CPN (cùm junctim, tùm singulum singulo) majores esse. Cùm itaque Semidiametri CR, CN, circumferentiæ perpendiculares sint; omninò liquet propositum. Fig. 62.

III. *Dato radio MN ad circulum incidenti congruum reflexum resignare.* Fig. 63.

Variis modis hoc facilè peragitur; quorum nunc unum adhibere, tunc alium ex usu sit. nos unum aut alterum ex expeditoribus attingemus. i. Incidens MN protrahatur ut circulum denuò secet in P.; & sumatur arcus Nϖ = NP; erit connexa ϖNH ipsius MNP reflexus. nam à centro C connexâ CN, manifestum est angulum

CNϖ,

CN ϖ, angulo CNP æquari . z 2. Accepto quovis in NM puncto
Fig. 63. (puta M) centro C per M describatur circulus MQH; item centro N per M describatur circulus MRH, qui priorem MQH secet in H; erit HN ϖ reflexus ipsius MNP. Etenim connexis CM, CH; & NM, NH, ex constructione liquet triangula CMN, CHN, invicem æquilatera fore; proindeque angulos CNM, CNH (& indè reliquos MNR, HNR) æquari 3. protensâ CNR, à quovis in MN puncto, puta M ducatur MG ad CR perpendicularis, & in hac productâ sumatur GH = GM; erit conjuncta HN ϖ iterum reflexus. Nam connexis NH, NM patet angulos GNM, GNH æquari. verum hi modi sufficiunt huic conficiendo perfacili negotio.

IV. Nocetur si fuerit HNP reflexus ipsius MNP fore N ϖ = NP.

V. Dispiciamus jam primò quid ex hujusmodi reflectione contingat puncto ab infinitâ quoad sensum distantiâ radianti, seu parallelos projicienti radios. quorsum, per circuli reflectentis centrum C protendatur indefinitè recta ABC (hoc autem in sequentibus evitandæ repetitioni perpetuò factum intelligatur; quin ejusmodi recta nominetur axis; hic *Speculi*, posteà *Diaphani*) bisecetur autem Semidiameter CB in Z; & per Z transeat recta ZY ad CB perpendicularis, indefinitéque protensa; tum quilibet incidat axi parallelus radius MNP ad N; (convexo circuli nil refert, an cavo; nam in utroque casu reflexus quoad directionem idem erit; vel ejus qui in hoc, iste qui in illo productus erit) connexáque CN ipsam ZY intersecet in V; fiátque CK = CV; ducatúrque NK; erit NK ipsius MN reflexus (vel reflexi productus) Nam ducatur NQ ad CB perpendicularis, & connectatur CP. éstque CZ . CK :: (CZ . CV ::) CQ . CN. quapropter antecedentes duplicando CN . CK :: PN . CN. item angulus KCN æquatur alterno CNP. ergò triangula CKN, NCP similia sunt; adeoque KN = KC. igitur è suprà generatim ostensis patet fore KN, ipsius MN reflexum.

VI. Hinc particularis emergit methodus hujusmodi quotcunque reflexos quàm expeditissime designandi; quin & ipsorum erga se rationes ac respectus; nec non pleraque primaria *Symptomata* facilè dilucescunt; corollariis nempe subjectis comprehensa.

VII. 1. Patet punctum Z, Semidiametrum CB bisecans, esse metam

metam infra quam nullus reflexus axem secat (vel perpendicularis ipsius reflexum B Z ad Z terminari). quia semper $Cv \sqsubset CZ$, adeóque $CK \sqsubset CZ$.

VIII. 2. Patet esse $KN = KC$.

3. Patet fore PN ($2CQ$), CN, $CK \div\div$.

IX. 4. Ductâ tangente BT, productâque CNE, patet secantem C E distantiæ C K duplam esse; & $EN = 2KZ$.

X. 5. Manifestum est incidentis ad F (hoc est ad distantiam 60 graduum à vertice) reflexum per verticem B transire; proindéque reflexos omnium intra BF incidentium axem intra spacium BZ decussare; sed omnes *extra* B F reflexos ultra B cum eo convenire. Fig. 64.

XI. 6. Perspicuum est duorum hujusmodi quorumvis ad easdem axis partes incidentium (ut ipsorum M N P, Q R S) reflexos (ut G N K, H R L,) productos se prius decussare, quàm axem. Nam, ductis CR, CN, est $C\rho \sqsubset Cv$, adeóque $CL \sqsubset CK$. unde necessariò rectæ N K, R L, se decussabunt, puta ad X. Fig. 65.

XII. Hinc ipsi convexis partibus incidentium reflexi, N G, R H, antrorsum procurrentes divergunt; adeóque nunquam uno plures idem oculi centrum permeant. unde speculum convexum unicam longinqui radiantis imaginem reddit.

XIII. 7. Notetur autem angulum G X R (vel K X L) à duobus reflexis comprehensum æquare duplum angulum N C R (hoc est duplum excessum angulorum incidentiæ). Nam ang. K X L = ang. A L R — ang. A K N = 2 ang. A C R — 2 ang. A C N = 2 ang. N C R.

XIV. Pro Sequentibus hujusmodi *Lemma* proponemus: In triangulo quopiam A B C recta A D bisecet angulum B A C; dico fore $AB + AC \sqsubset 2AD$. Fig. 66.

In *Isoscele* res clara est; in alio proinde sit $AC \sqsubset AB$; centróque A per B ducatur circulus B X Y secans ipsam. A D in X, & A C in Y. Subtensa B X ducatur, ipsamque A C secet in V; fiatque V T ad A D parallela. denuo subtensa X Y connectatur. Et quoniam ang. X V C major est angulo X Y V, vel angulo B X D, vel ipso

 BVT,

BVT, patet rectam VT angulum XVC secare. item ob angulum XYV obtusum, est $XV \sqsubset XY = BX$. ergo $BV \sqsubset 2BX$; & $VT \sqsubset 2XD$. Verùm ang. VTC (major ipso TVB, vel ipso DXB) est obtusus; adeóque $VC \sqsubset VT$; itaque magis $YC \sqsubset 2XD$. ergò $AB + AY + YC \sqsubset 2AX + 2XD$. hoc est $AB + AC \sqsubset 2AD$: Q.E.D.

XV. Quò paralleli radii rectiùs (vel axi propinquiùs) incidunt, eò reflexorum concursus ad axem sibi viciniores sunt.

Fig. 67. Nempe sumantur utcunque pares arcus NR, RX; & incidentium MN, QR, VX reflexi NK, RL, XM cum axe conveniant punctis K, L, M, erit $ML \sqsubset LK$. Nam connexæ CN, CR, CX rectæ ZY occurrant punctis v, ϱ, ξ. Est itaque (juxta *Lemma* præcedens) $C\xi + Cv \sqsubset 2C\varrho$; hoc est, $CM + CK \sqsubset 2CL$. quare $CM - CL \sqsubset CL - CK$; hoc est $ML \sqsubset LK$: Q.E.D.

XVI. Exhinc patet axi propinquam lucem ab hujusmodi reflectione magis magisque constipari; maximè circa punctum Z, ubi perpendicularis ipsius quasi reflexus terminatur. unde potissima constat ratio, quare concavis à speculis ad solem expositis circa punctum Z *Ignis* accenditur; enimverò condensatior, inque spacium arctius quasi compressa lux validiorem exerit vim, ac efficaciam.

XVII. Quinetiam ex his consectatur, longinqui puncti imaginem oculo in axe constituta circa punctum Z consistere.

Fig. 68. Sit, inquam; BCO axis Opticus; oculique diameter $D\delta$ (in plana nempe circuli propositi sita) hujus autem extrema permeent reflexi NKD, $VK\delta$ (ad incidentes MNP, $\mu\nu\varpi$ pertinentes). jam abunde manifestum est imaginem conspicuam intra KZ spatium versari. Nam alterius cujusvis hinc, vel indè cadentis reflexus (seu ipsius RS, vel $\varrho\sigma$) oculum omnino transgredietur, adeóque nihil quicquam ad visionem ipsam, vel ad ejus quemcunque modum determinandum conferet; id autem omne meritò tribuetur radiorum intra peripheriam NV incidentium reflexis; qui scilicet oculum ingredientes suo quisque modo visum aliquatenus afficiant. quoniam tamen ex his, qui propiores axi rectiùs incidunt oculo, magísque pollent idcircò; nec non iidem propterea faciliùs ad unum in oculo punctum recolliguntur; præ cæteris etiam illi catervatim ingruunt; rationi consonum est isthic præsertim imaginem consistere, siquidem velut ab eo plures, ac efficacissimi radii videbuntur emanare. Subjicio, propter admodum exiguam pupillæ

pillæ latitudinem, ipsum spatium K Z non ità magnum esse, quin instar *Puncti* possit censeri. Quibus expensis luculentè constare videtur propositum.

XVIII. Subdo tantùm, si oculus usquam intra spacium Z B statuatur, visionem indè confusam, aut nullam evadere; quia nempe tunc reflexi præcipui (seu rectissimi) oculum convergentes appellent.

XIX. Ex his porrò facilè refelluntur, quæ de imaginis loco plenique tradunt omnes Optici; cum illis novissimus *Honor. Fabri*; juxta quorum doctrinam imago à puncto reflectionis tanto distat intervallo, quanto punctum radians ab eodem semovetur; ità quidem ut Sol ex hujusmodi reflectione conspicuus ad tantam, quantam directè spectatus, distantiam (eorum insistendo sententiæ) debeat apparere. quod immane quantum experientiæ refragatur. etenim si Soli exponatur *Speculum* R B *ρ* (concavum, aut convexum) sic ut ei Sol quasi perpendiculariter immineat, oculúsque prope axem B C constituatur uspiam; ferè circa punctum Z, arbitrante sensu, luculenta Solis imago sese præbebit oculo conspiciendam; id quod juxta ratiocinium nostrum necessariò debuit evenire. verùm hic error (in Opticâ capitalis, & quo non ablegato nulla phænomeni cujuscunque ratio verisimilis constabit, ubique se objiciet refutandum. hic itaque pluribus parco; pergóque versus oculum extra radiationis axem positum, postquam unicam hanc præcedentibus adnexam obnservationem subjecero.

XX. Majoris Sphæræ portio vehementiùs ûrit; ut & Objectum visibile clariùs atque distinctiùs repræsentat, quàm minoris æqualem obtinens latitudinem portio.

Super eandem nempe subtensam N V insistant imparium circulorum segmenta N B V, N b v; quorum axis A D; & in hoc circulorum centra C, c; constat ut minoris peripheriam N b v extra majoris N B V jacere; ità majoris centrum C infra minoris centrum c existere. bisecentur jam Semidiametri C B, c b in Z, z; ducantúrque tangentes B T, b t; hisque ductæ C N, c N occurrant punctis E, e; denuo radii P N axi paralleli sit ad peripheriam N B V reflexus N K; ad ipsam verò N b v sit ejusdem reflexus N k; liquidissimè jam patet quòd sit N e ⊏ N E; hoc est quòd dupla z k major sit duplâ Z K; adeóque simplâ z k major simplâ Z K. majoris itaque Sphæræ portio strictiores intra terminos illabentem lucem cogit; adeóque potentiùs operatur; eâdemque de causa rem objectam illustriùs atque Fig. 69.

 distinctiùs

distinctius exhibet obtuenti. quod erat propositum ostendere. Et hæc quidem ad locum imaginis determinandum attinentia pleraque propter oculum in axe situm suffecerit attigisse. Superest ut idem oculi gratiâ secùs constituti pertentemus. id operis sequenti deputamus.

LECT. VII.

I. ID nunc agimus, ut ab infinito quoad sensum intervallo radiantis puncti, è reflectione circularem ad peripheriam peracta oriundæ imaginis, oculi respectu præter axem siti, locum exquiramus. quocirca primùm ipsa recta linea determinanda venit, in qua locus iste versatur; tum ipsissimum præcisè punctum est designandum. In primi verò propositi gratiam hoc *Problema* confici debet.

II. Dato circulo reflectente BNP (cujus centrum C) rectâque CB positione data; designandus est huic parallelus radius, cujus reflexus per datum transeat punctum.

Fig. 70. III. Si datum punctum (puta K) in ipsa CB existat, facilimè peragitur negotium. nam si centro K, intervallo KC describatur circulus, ipsi reflectenti occurrens in N; erit KN reflexus ducti ad CB paralleli; prout ex antedictis abunde perspicuum est.

IV. Si datum punctum (puta jam X) in ipsa reflectentis circumferentia versetur; arcûs trisectione statim exhauritur *Problema*. Nam ducatur XH ad BC parallela (quæ quidem ipsa uno modo proble-

Fig. 71. mati satisfacit) & interceptus arcus XH secetur punctis N, P, ut sint arcus XN, NP, PH æquales inter se; connectantúrque rectæ XN, NP. dico factum. etenim ducantur CN, XP; & patet angulum CNX ipsi CNP æquari; adeóque fore XN reflexum ipsius PN; quinetiam ang. NPX æquatur angulo HXP; proindéque NP ipsi XH, hoc est ipsi BC, parallela est. itaque factum.

V. Verùm

V. Verùm extra casus hos, & particulares alios (mihi non incognitos, at nunc *ἀπροσδιορίστως*) *Problema* magis solidum est, in summo quippe gradu tale; quatuórque subinde Solutiones admittens; perque lineam evolvi potest (ut alia pleraque, sicuti pridem admonitum nobis) sibi peculiarem; illam hoc modo quàm expeditissimè per puncta describendam: Per datum punctum X protendatur indefinitè recta GF. ad datam CB parallela; connectatúrque recta XC; & super hanc ceu diametrum describatur circulus XICI, tum è puncto C prodeant quotcunque rectæ circulum XIC secantes punctis I, rectámque GF punctis H; & adsumantur in rectis CHI rectæ IN æquales interceptis IH (ità scilicet ut puncta I rectas NH perpetuò bisecent) perque puncta quotvis ejusmodi N traducta concipiatur linea; nimirum hæc (quà certè nulla Sectio conica faciliùs delineatur) problematis nostri constructioni deservit, ejúsque liquidò naturam patefacit; siquidem ejusce cum dati circuli intersectiones N (illæ verò subinde quatuor erunt, interdum tres (contactum enim intersectionibus adnumero) nonnunquam Solummodò duæ; prout datus circulus magnitudine præditus est aliâ ac aliâ, quæ strictim adnoto tantùm, animum advertenti manifestè constitura) possibiles quasque Solutiones exhibebunt. ducatur enim ab ipso X ad ejusmodi quamvis intersectionem N recta XN; & per N transeat MP ad BC parallela. (vel ad GX) connexáque CN circulum XIC secet in I, rectámque GX in H; item jungatur XI. & quoniam è descriptæ lineæ naturâ seu constructione est $IH = IN$; angulúsque CIX, in Semicirculo, rectus est; erit $XN = XH$; vel ang. $XNI =$ ang. XHI. atqui ang. XHI alterno HNP par est. quapropter anguli XNI, HNP pares sunt. adeóque recta NX ipsius NP reflexus erit. quod oportebat fieri. sic, inquam, enodari poterat id Problematis. at quoniam (ut innuebam supra) *Geometrarum palato minus sapiunt hujusmodi Problematum inusitata solutiones*; aliter id (satis breviter atque perspicuè) dabimus effectum hoc saltem eò faciens Lemmaticum Problema præmittentes. Fig. 72.

VI. Dato circulo (cujus positione data diameter GF) & puncto C in ejusce circumferentia quoque dato; per hoc recta ducatur, cujus pars diametro circumferentiæque interjecta æquetur datæ rectæ Z.

Id sic exequimur. Connectatur recta CF; & huic perpendicularis ducatur recta FV; & accipiatur ad ipsas Z, GF tertia proportionalis P; & per G angulo CFV inseratur recta RS par ipsi P (id autem quomodo præstandum, edocuimus supra) tum per C ducatur

ducatur CHI. ad RS parallela; erit intercepta HL (quod requiritur) æqualis ipsi Z. Nam connectatur CG; & huic perpendicularis ducatur GT; ad CF proinde parallela. quia jam ang. GCT = CGR = FSR, liquet rectangula trigona CGT, RFS assimilari. adeóque fore CT. GG :: SR. SF. item (ob similitudinem triangulorum CGH, SFG) est CG. GH :: SF. FG. erit igitur ex æquo CT. GH :: SR. FG. (hoc est) :: FG. Z. verum est CT. FG :: CH. FH :: HG. HL. permutandóque CT. HG :: FG. HL. quare FG. Z :: FG. HL. liquet igitur HL ipsi Z datæ æquari: Q. E. F.

Plures esse casus possunt; ut nempe punctum L sit intra Semicirculum GCF (idque positum inter puncta C, G, vel inter ipsa C, F) vel in altero Semicirculo GEF, ultra GF sito respectu puncti C; sed hæc una constructio simul ac demonstratio pariter omnibus convenit; ut pluribus huc non sit opus.

Fig. 73, 74.

VII. Adnotetur saltem quoad istos casus, quòd sicuti per punctum G (ut antea commostratum) aliquando quatuor rectæ duci possunt datam adæquantes, rectísque FC, FV terminatæ; binæ scilicet inter angulum quo punctum G continetur, alteræque totidem extra ipsum; nonnunquam verò tres solæ; quum data recta minima continget esse cunctarum, quæ dicto punctum G continenti angulo possunt interseri; subinde tantùm duæ, quando data tali minimæ cedit; ità respectivè Problema jam expositum plures totidem solutiones accipit. Sanè quò major est hic data Z, eò minor evadet intercepta RS; & vicissim quò minor RS, eò major ipsa IZ; unde si fuerit RS omnium minima, quæ angulo CFV punctum G capienti inseri possunt, etiam HL maxima erit è C prodeuntium rectarum, quæ inter diametrum GF, & Semicirculum GEF comprehendi possunt. unde *Porismatis* loco patet, è supradictis, quo pacto talis maxima duci possit; & hoc ipsum Problema penitus determinari. quod attendenti non obscurum innuisse satis videtur. jam ad principalis quæsiti resolutionem accedimus; ità jam brevitur propositi.

Fig. 73, 74. VIII. Per datum punctum X rectam ducere, cujus reflexus datæ positione rectæ BC sit parallelus.

Id sic efficitur. Centro X per C describatur circulus GLFC; item per X ducatur GF ad BC parallela; tum ex C projiciatur recta, cujus secundum Lemma mox præcedens, intercepta pars HL æquetur Semidiametro reflectentis circuli; quæ & illum secet in N;

ductæ

ductæ XN reflexus (puta NP) ipsi BC parallelus erit. Nam connexis XC, XL; quoniam $CN = HL$; & $CX = LX$; & anguli XCL, XLC pares sunt; erit $XH = XN$. quapropter erit NP ad XH, vel BC parallelus: Q. E. F.

IX. Ex hac constructione, cum præmissi lemmatis solutione collatâ dilucescet hujusmodi non ultra quatuor reflexos per idem quodcunque punctum, ceu X, transire; quorum duo ad unas axis partes incidentibus, reliqui ad alteras conveniunt. adparebit etiam si CN major sit, quam ut ei par HL rectâ GF, Semicirculóque GEF intercipi possit; quòd ad axis partes, ad quas ipsum X ponitur, omnino nullus per hoc punctum reflexus meabit; quinetiam si CN tanta sit, ut ei par una tantùm ejusmodi recta possit intercipi, quòd unicus per ipsum X reflexus iter suscipiet. tales, inquam, expositi problematis determinationes hanc constructionem haud obscurè sequuntur; quas certè tu meliùs uno mentis (haud dormitantis) ictu perspexeris, quàm ego pluribus verbis explicâro. Fig. 75.

X. Exhinc itaque denuò rectam (seu rectas) satis definivimus, in qua (vel in quibus) puncti radiantis Imago, respectu visûs utcunque positione datum centrum habentis, consistit. ad ejus jàm præcisiorem locum investigandum accingemur; in istarum rectâ quâpiam existentem.

XI. Huc adnotetur imprimìs, quòd si duorum ad easdem axis partes incidentium parallelorum (NP, RS) reflexi sint $N\varpi$, $R\sigma$; erit arcus NR, vel PS arcûs $\varpi\sigma$ subtriplus. Concurrant enim dicti reflexi in X; & Connectatur recta $R\varpi$. & quoniam, è præmonitis, angulus NXR duplus est anguli arcui NR ad centrum insistentis; erit idem angulus NXR anguli $N\varpi R$ quadruplus. quapropter erit ang. NXR − ang. $N\varpi R$ triplus anguli $N\varpi R$, hoc est angulus $XR\varpi$ anguli $N\varpi R$ triplus. unde quoque triplus erit arcus $\varpi\sigma$ ipsius NR: Q. E. D. Fig. 76.

XII. Iisdem stantibus dico ϖRX (obliquioris reflexi partem incidentiæ concursûsque punctis interceptam) majorem quadrante totius reflexi $R\sigma$. Nam, ductis subtensis NR, $\varpi\sigma$; erit $1 . 3 :: \text{arc.} NR . \varpi\sigma . \sqsupset \text{recta} NR . \varpi\sigma :: RX . X\varpi \sqsupset RX . X\sigma$ (quia scilicet est $X\varpi \sqsubset X\sigma$). igitur est $X\sigma$ minor triplâ RX; componendóque minor erit $R\sigma$ quadruplâ RX: Q. E. D.

XIII. Item.

XIII. Item, dico fore N X (rectioris itidem reflexi concursûs incidentiæque punctis interjectam partem) minorem quartâ parte totius N φ. Etenim fiat ang. H R φ = ang. N φ R; quapropter erit H R = H φ; adeóque 2 H φ = H R + H φ ⊏ R φ ⊏ N φ. item quoniam ang. R H N = 2 ang. H R φ = ang. X R H; est X H = X R ⊏ X N. quum itaque sit H φ major semisse totius N φ; & X H major semisse residui N H; liquet totam X φ majorem esse triplâ X N; seu totam N φ majorem esse quadruplâ N X: Q. E. D.

XIV. Hinc perspicuum est, si fuerit N Z reflexi N φ quadrans, quòd nullus alter hujusmodi reflexus punctum Z permeabit. Etenim alterius cujusvis reflexus permeare dicatur; erit igitur, si obliquior is fuerit, N Z ⊐ $\frac{1}{4}$ N φ; sin rectior fuerit, erit N Z ⊏ $\frac{1}{4}$ N φ (nimirum è proximè demonstratis hæc consequuntur) quæ repugnant hypothesi.

Fig. 77. XV. Quinetiam ipsi N φ propiùs adjacentium occursus puncto Z viciniores sunt, hinc indè. Secent, inquam, radiorum L M, R S reflexi L μ, R σ ipsam N φ punctis Y, X; istæ quidem (rectior) in Y, hic (obliquior) in X; erit Z Y ⊐ Z X. Nam connectantur R φ, L φ; & fiat ang. φ L H = ang. N φ L; ducantúrque rectæ R H, R Y. estque R H ⊏ L H = H φ; adeóque ang. H φ R ⊏ ang. H R φ; & proinde ang. N H R ⊐ 2 ang. H φ R. item Y R ⊏ Y L = Y H; proindéque rursus ang. N Y R ⊐ 2 ang. Y H R. quare multo minor est ang. N Y R quadruplo N φ R est autem ang. N X R quadruplus anguli N φ R; igitur ang. N X R ⊏ ang. N Y R. ponatur jam, si fieri potest, punctum X ipsis Y, Z interjacere. erit igitur angulus externus N Y R interno N X R major; atqui minor ostensus est. quæ repugnant. itaque potiùs est Z Y ⊐ Z X: Q. E. D.

Ad alteras partes haud absimilis erit discursus; parco fastidiosæ repetitioni. ||

XVI. Hinc obiter patet ad easdem partes incidentium reflexos sese priùs (velut ad φ) quàm ipsum N φ decussare.

XVII. Quinimò rursus hinc constat ad easdem axis partes plures duobus in uno puncto reflexos non concurrere.

XVIII. Demùm (ut aliquando tandem destinatum attingamus scopum) è dictis

è dictis colligatur licet, quòd oculo, cujus Centrum O uspiam in ipsa N ☉ ponitur, circa punctum Z (ipsam N ☉ prænotato modo quadrisecans) radiantis imago conspicietur. Sit enim pupillæ (prout antehac aliquoties) diameter E F; per cujusce terminos transeant radiorum L M, R S reflexi L E, R F; quorum iste secet ipsum N ☉ in Y, hic in X. quoniam igitur radiorum obliquiorum ipso R S, rectiorum ipso L M nullus oculum intrabit; uti suprà non semel argumentati sumus, intra spatium X Y necessariò consistet imago. quinetiam cùm radiorum arcui L R incidentium qui prope punctum Z reflectuntur axi N ☉ propiùs adjacentes perpendiculariùs oculum feriunt, idque spissiùs (ut ex analogia par est existimare; nec enim id operosiùs aggrediar demonstrare) propter aliquoties expositas causas ab eo videbuntur obtutum afficientes radii promanare; hoc est ad ipsum imago consistet. Accedit quod ob angustiam pupillæ spatium X Y satis modicum existit; ut puncti modum vix excedere videatur. Fig. 78.

XIX. Subdo; si statuatur oculi centrum uspiam in Z N; isque versus partes N obvertatur; objectum confusiùs apparere; quippe cùm reflexi visum convergentes appellant; vel quoniam imago Z tunc pone visum consistit.

XX. Hinc à speculo Cavo tantùm una repræsentatur Imago, saltem bene distincta. Nam in duorum reflexorum N ☉, R σ concursu X statuatur oculi centrum; & sit $R\zeta = \frac{1}{4} R\sigma$; unde $R\zeta \sqsupset RX$. itaque spectabitur quæ ad ζ imago ab oculo in X collocato, versúsque partes N R obverso; sed tum imago Z post oculum consistit.

XXI. Et hæc quidem rectè percepta, serióquè perpensa vix addubito quin facilè sibi fidem conciliatura sint; nihil ut sit opus adversantia *seu veterum Opticorum decreta, seu recentiorum Commenta pluribus convellere*; quæ certè cùm nullâ perspicuâ ratione nituntur, tum ab experientia plerumque discordant. Cætera verò siqua restant ad hoc argumentum spectantia studio vestro commendabimus elicienda; mox ad è sensibiliter finita distantia radiantis puncti *Symptomata* similiter exploranda animum adjecturi.

LECT. VIII.

I Quæ radiis obveniunt à longinquo puncto manantibus, adeóque quasi parallelis, ex reflectione peripheriam ad circularem peractâ; ubinam & quousque vel sibimet ipsis occurrunt, vel axem intersecant; quo loco radians oculo ubicunque constituto repræsentant, in postremis est dissertatum. ad punctum jam accedimus radios ejiciens sensibiliter divergentes. Et hujusmodi quidem puncto, quanquam seu in obversas circuli Convexas partes seu ad concavas radiet communia pleraque symptomata conveniunt; tamen communi fretus *Opticorum* exemplo, præsertímque majoris evidentiæ causâ, casus istos distinctè prosequemur; illum fusius imprimis, hunc aliquanto concisiùs. ad rem.

II. In circuli BNP (cujus centrum C) convexum à puncto A quilibet incidat radius AN, ísque reflectatur in NG; patet reflexum GN productum axi AC occursurum. nam ductâ CNE patet GN productum angulum ANC secare; nec non ideò trianguli ANC basin AC; puta in K; quo posito.

III. Dico fore AC. AN :: KC. KN. Nam ducatur KH ad CN parallela. est igitur ang. KHN = CNP = CNK = NKH. hoc etiam è superius generatim ostensis consectatur, adeóque NH = NK. itáque cùm sit AC. AN :: KC. HN. erit etiam AC. AN :: KC. KN.

IV. Corollarii loco notetur (ductâ CP) fore NH = NK; & triangula HNK, NCP assimilari; vel esse HK. HN :: NP. CN.

V. Porrò, constantibus iisdem, dico fore AC. KC :: ACq — ANq. CNq. Nam est NP. CN + AN. CN = HK. HN + AN. CN = HK × AN. HN × CN = AN. HN +

+ HK . CN . = AC . KC + AK . AC — AK . KC . verùm est NP . CN + AN . CN = NP × AN + CNq. ergo erit AK . KC : : NP × AN . CNq. componendóque AC . KC : : NP × AN + CNq . CNq. cùm sit igitur NP × AN = AP × AN — ANq . & AP × AN = ACq — CNq; adeóque NP × AN + CNq = ACq — CNq — ANq + CNq; = ACq — ANq . erit AC . KC : : ACq — ANq . CNq : Quod E. D. Fig. 79, 80.

Coroll. AK . KC : : AN × NP . CNq.

VI. Etiam hoc *Theorema* subdemus: Si fiat 2 CA . CN : : CN . E . & 2 CK . CN : : CN . F ; & sumatur CQ = E + F; erit ducta NQ ad CA perpendicularis. vel reciprocè; posito quòd sit NQ ad CA perpendicularis; erit CQ = E + F. || Nam (ut hoc posterius ostendamus) quoniam est 2 CA . CN : : CN . E . & CN . 2 CK : : F . CN . erit ex æquo perturbatè 2 CA . 2 CK : : F . E . vel CA . CK : : F . E . componendóque CA + CK . CK : : F + E . E . Porrò quoniam est ANq = ACq + CNq — 2 AC × CQ; erit 2 AC × CQ — CNq = ACq — ANq . itaque (juxta præcedentem) erit 2 AC × CQ — CNq . CNq : : AC . CK . hoc est (ob CNq = 2 AC × E) 2 AC × CQ — 2 AC × E . 2 AC × E : : AC . CK . hoc est CQ — E . E : : AC . CK . vel componendo CQ . E : : AC + CK . CK . erat autem AC + CK . CK : : F + E . E . ergò CQ = F + E: Quod E. D.

VII. Ex istis porrò deducetur, si dividatur Semidiameter BC in Z; ut sit AC . AB : : CZ . BZ ; punctum Z limes erit citra quem (respectu centri C) nullus hujusmodi reflexus axem decussabit. Cujusvis, inquam, radii AN esto reflexus GN; axi occurrens in K . dico fore CK ⊏ CZ. Nam ob hypothesin (permutandóque) est AC . CZ : : AB . BZ . igitur (antecedentes, & consequentes copulando) AC . CZ : : AC + AB . CB . quare (posterioris hujusce rationis utrumque terminum in æquales AC — AB, & BC ducendo) erit AC . CZ : : ACq — ABq . CBq . est autem ACq — ABq ⊏ ACq — ANq; adeóque ACq — ABq . CBq . ⊏ ACq — ANq . CBq : : AC . CK (è mox ostensis hoc) quapropter erit AC . CZ ⊏ AC . CK . indéque CK ⊏ CZ: Q. E. D. Fig. 81, 82.

VIII. Aliter hoc idem; ut quibusdam fortasse videbitur, minus involutè: per N ducatur VT circulum contingens. & quoniam NT

bissecat angulum ANK; erit $AN.NK :: AT.TK \sqsupset AB.BK$. quare $BZ.AB + AN.NK \sqsupset BZ.AB + AB.BK$ (communem adsciscendo rationem BZ ad AB). est autem $BZ.AB + AN.NK = CZ.AC + AC:CK = CZ.CK$ & $BZ.AB + AB.BK = BZ.BK$. ergo $CZ.CK \sqsupset BZ.BK$. permutandóque $CZ.BZ \sqsupset CK.BK$. quin & componendo $CB.BZ \sqsupset CB.BK$. ideóque $BZ \sqsubset BK$; quare punctum Z centro propinquius est, quàm ipsum K: Q. E. D.

Coroll. Hinc si puncta Z, ζ fuerint limites punctorum radiantium A, α (quorum A sit à speculo remotiùs, quàm α) erit $CZ \sqsupset C\zeta$. Nam est $BC.AB \sqsupset BC.\alpha B$. adeóque compositè $AC.AB \sqsupset \alpha C.\alpha B$. hoc est $CZ.BZ \sqsupset C\zeta.B\zeta$. quare componendo $BC.BZ \sqsupset BC.B\zeta$. & indè $BZ \sqsubset B\zeta$.

IX. Porrò, consectatur è præmissis, quòd si duorum quorumvis incidentium AN, AR reflexi GN, HR axem intersecent punctis K, L; erit $CL, CK :: ACq - ANq.ACq - ARq$. || Nam quoniam est $AC.CK :: ACq - ANq.CBq$. itémque $CL.AC :: CBq.ACq - ARq$. erit ex æquo perturbatè $CL.CK :: ACq - ANq.ACq - ARq$.

X. Simili planè discursu, si fuerit $AC.AB :: CZ.ZB$: erit $CZ.CK :: ACq - ANq.ACq - ABq$. & $CL.CZ :: ACq - ARq.ACq - ABq$.

XI. Hinc perspicuum est obliquioris reflexi concursum à centro magìs elongari quàm rectioris; quòd nempe sit $CL \sqsubset CK$. Cùm enim sit $ACq - ANq \sqsubset ACq - ARq$; erit $CL \sqsubset CK$.

XII. Hinc necessariò duo quilibet ad easdem axis partes incidentium reflexi (quales NK, RL) sese priùs quam axem intersecabunt, puta ad X. quo posito.

XIII. Adnotari potest angulum GXH vel KXL (à reflexis occurrentibus inclusum) æquari angulo NCR unà cum differentia angulorum incidentiæ; vel, duplo angulo NCR unà cum ang. NAR. || Etenim
Fig. 83. ang. $KXL =$ ang. $ALR - AKN =$ ang. $ACR + CRL - :$ ang. $ACN + CNK =$ ang. $ACR - ACN + :$ ang. $CRL - CNK =$ ang $NCR + :$ ang. $CRS - CNP$. || Quinetiam ang. $CRS - CNP =$ ang. $RCA + CAR - :$ ang. $NCA +$ CAN

$CAN =$ ang. $NCR + NAR$. itaque rursus ang. $KXL =$ 2 ang. $NCR +$ ang. NAR. liquent igitur quæ proposita sunt; in usum (si fortè) sequentium. pro quibus itidem hæc proponenda sunt.

XIV. Etiam palàm est è dictis ipsos reflexos GN, HR directè procurrentes à se divergere; adeóque duntaxat unum hujusmodi reflexum oculi centrum transire; consequentèr & puncti A tantùm unam à convexo speculo imaginem exhiberi. Fig. 83.

XV. *Lemmatia* 1. Sint quæcunque tria quanta A, P, C; primóque sit $A . B \sqsubset B . C$; dico fore $A + C \sqsubset 2 B$. ponatur enim fore $A . B :: B . E$. erit ergò $A + E \sqsubset 2 B$. quinetiam erit ergò $B . E \sqsubset B . C$ adeóque $C \sqsubset E$. ergò magis $A + C \sqsubset 2 B$.

2. Sit (iisdem adhibitis quantis) secundò $A + C \sqsupset 2 B$. dico fore $A . B \sqsupset B . C$. nam sive dicatur esse $A . B :: B . C$. vel $A . B \sqsubset B . C$. sequetur utrobique fore $A + C \sqsubset 2 B$; contra hypothesin. itaque potiùs est $A . B \sqsupset B . C$.

XVI. Etiam hoc adjungo. Si duo sumantur ad easdem axi partes (circulique convexâ parte comprehensi) sibimet æquales arcus NR, RX; & ducantur rectæ AN, AR, AX; erit $ANq + AXq \sqsubset 2 ARq$. Fig. 84.

Nam ducantur CN, CR, CX; & demittantur ad AC perpendiculares NE, RF, XG; sint item NP, RQ ad AC parallelæ; ducantúrque subtensæ NR, RX.; & quoniam ang. $RXQ \sqsubset$ ang. NRP; patet esse $RX . RQ \sqsupset NR . NP$; adeóque cum $RX = NR$, erit $RQ \sqsubset NP$; hoc est $FG \sqsubset EF$. ergò $2 CF \sqsubset CE + CG$; unde $4 AC \times CF \sqsubset 2 AC \times CE + 2 AC \times CG$ atqui est $ANq = ACq + CNq - 2 AC \times CE$. & $AXq = ACq + CNq - 2 AC \times CG$. & $2 ARq = 2 ACq + 2 CNq - 4 AC \times CF$. ergo $ANq + AXq \sqsubset 2 ARq$.

Addo, sequentium gratiâ, si punctum A sumatur ad alteras (infra centrum) partes; & reliqua similiter apparentur; fore contrà, tum $ANq + AXq \sqsupset 2 ARq$. nam in eo casu est $ANq + AXq = 2 ACq + 2 CNq + 2 AC \times CE + 2 AC \times CG$. & $2 ARq = 2 ACq + 2 CNq + 4 AC \times CF$. unde liquet propositum.

XVII. Sint jam ad easdem axis partes duo quilibet æquales arcus NR,

NR, RX; & incidentinm AN, AR, AX reflexi GN; HR, IX
Fig. 85. axi occurrant producti punctis K, L, M; erit intervallum ML ab obliquiorum occursibus conclusum majus ipso LK rectiorum occursibus intercepto.

Nam quoniam est $ANq + AXq \sqsubset 2ARq$. erit $2ACq - ANq - AXq \sqsupset 2ACq - 2ARq$. adeoque $ACq - AXq . ACq - ARq \sqsupset ACq - ARq . ACq - ANq$. hoc est, è præmonstratis, $CL . CM \sqsupset CK . CL$; vel inversè $CM . CL \sqsubset CL . CK$. quapropter erit $CM + CK \sqsubset 2CL$. & ideo $CM - CL \sqsubset CL - CK$ hoc est $ML \sqsubset LK$: Q.E.D.

XVIII. Hinc constat, etiam in hac hypothesi, rectiùs incidentem lucem à reflectione magis inspissari; seu spatio versus limitem Z arctiore constringi.

XIX. Quin ab his demum omnibus colligitur, si uspiam in axe (velut ad O) constituatur oculi centrum, quod punctum A necessa-
Fig. 85. riò circa limitem Z apparebit. Etenim (prorsus ut in præcedente quoad radios ab infinitè dissito puncto manantes hypothesi) ab axis illi puncto adjacente parte radii cùm copiosiores, tum axi viciniores, oculóque rectiores, efficaciâ proinde præpollentes, nec non qui facilius re-adunentur, provenire videntur. quæ nempe cuncta simul ac emergentem propositi consequentiam abunde, puto, dedimus enucleata. Succedit ut hâc parte defuncti pro visu extra radiationis axem collocato itidem imaginis sedem definiamus. veruntamen hæc, quanquam haud ita quantitate multa, pro rei tamen obscuritate fortassis nimia videbuntur. itaque jàm opportunum autumo desistere.

Lect.

Lect. IX.

I. Qualiter in obversum Speculi circularis convexum finitè distans punctum radiat, & ubi loci adpareat oculo in recta constituto per ipsum radians & speculi centrum trajecta postremò connisi demonstrare; nunc idem quoad aspectum alias ubicunque situm aggredimur expiscari. quo primum attinet ut rectam investigemus, in qua consistet Imago; tum ut punctum ejus in ista recta præcisum determinemus. & primo quidem negotio satisfactum erit hujusmodi *Problema* conficiendo; quod (sequentium quoque gratiâ) generatim proponimus.

II. *Dato circulo reflectente* (cujus centrum C) *datisque binis punctis; ab horum uno recta ducatur, cujus reflexus per alterum transeat.*

1. Si data puncta (puta A, X) sint ambo in circuli peripheria, manifestum est bisecto arcu AX in N, connexisque subtensis NA, NX, rectas NA, NX sibi mutuò reflexas fore; seu, junctâ CN, angulum CNX angulo CNA æquari. Fig. 86.

2. Etiam si datorum unum (X) in circumferentia ponatur; liquet, connexis AX, CX, factoque angulo CXH = CXA, fore XA, XH alterum alterius reflexum. Fig. 87.

3. Item si data puncta (A, X) æqualiter à centro distent; connexis rectis AC, XC, bisectoque angulo XCA à recta CN circulum reflectentem intersecante ad N; perspicuum est conjunctas rectas AN, XN, invicem in se reflecti; vel angulum CNX ipsi CNA æquari. Fig. 88.

III. 4. Si puncta data (puta jam A, K) ambo existant in recta per reflectentis centrum transeunte (nempe ABKC.)

1. Fiat CK . AC :: CB . T. ac inter CB, & T sit proportione media V (unde CBq . Vq :: CB . T :: CK . AC). tum centro A, intervallo $\sqrt{ACq - Vq}$. describatur circulus reflectentem Fig. 89.

secans

secans in N; & per N ducatur KNG; hæc ipsius AN reflexa erit.

Fig. 89. Nam ob $ANq = ACq - Vq$. erit $Vq = ACq - ANq$. adeóque $CBq . ACq - ANq :: (CBq . Vq ::) CK . AC$. quod, è præmonstratis, reflectioni proprium est. ergò liquet propositum.

2. Ità quidem in hoc casu; at si punctum A ponatur aliàs, ut sit $AC \sqsupset AN$; reliquis stantibus, Sumendum erit intervallum $AN = \sqrt{:} ACq + Vq$; ut sit $ANq - ACq = Vq$. ut posthac constabit, ubi de concavis agemus. Aliter hoc idem. Fiat $2 CK . CB :: CB . F$. & $2 CA . CB :: CB . E$. sumatúrque $CQ = E + F$. & ducta QN ad AC perpendicularis circulum secet in N. connexæ AN, KN altera alterius reflexa erit. hoc è suprà dictis liquidò consectatur. At si fuerit $AN \sqsubset AC$; tum accipi debet $CQ = F - E$ (reliquis nihil immutatis, utì postmodùm apparebit) factum erit.

IV. Intra casus hos *Problema*, ceu videtis, facilè construitur; ast illos; aliósque speciales, si qui sunt, excipiendo, generaliter conceptum omnino Solidum est, & certè *δυσμήχανον*; vix ut aliud à *Geometris* hactenus attentatum difficilius reperiatur. Et primo quidem per lineam extrui, explicarique poterit sibi peculiarem, hoc vel adsimili modo describendam.

Connexâ CA, super diametrum CA describatur circulus AIC; item semidiametro CA describatur alter circulus AHG. tum à C educantur rectæ quotvis CI circulum AIC secantes punctis I; & per A, I ductæ rectæ circulum AHG secent punctis H; demum per H, Fig. 90. & X rectæ ducantur ipsas CI decussantes punctis N. per hujusmodi puncta quævis designabilia transibit linea, *Problematis* expositi solutioni accommodata. Sit enim ejus, ac reflectentis circuli quævis intersectio N (qualium certè pro reflectentis circuli magnitudine subinde quatuor, aliquando tres, modò binæ tantùm erunt) & connectatur AN. Et quoniam angulus CIA in Semicirculo rectus est, erit recta AH bisecta in I. adeóque triangula ANI, HNI sibimet æqualia prorsus & æquiangala erunt; & speciatim ang. $INA =$ ang. INX. unde patet propositum.

V. Verùm quoniam (ut pridem admonitum) hujusmodi constructiones, etsi longè faciliores iis quæ per vulgò receptas lineas peraguntur, & *Problematum* naturam magis in propatulo collocantes à *Geometris* nihilo-

nihilominus gravatim admittuntur; istâ tantummodò raptim insinuatâ, subnectemus aliam ab illorum gustu non abhorrentem; illam nempe (quando scilicet haud alia melior ut varias pertentans analyses, & hoc in alia complura *Problemata* transformans existimari possum, facilè possit excogitari; quum & operæ meæ satis alioquin exercitatæ nonnunquam videatur parcendum) quam olim *Albazenus Arabs* scriptis commendavit; ab horribili tamen illâ prolixitate simul ac obscuritate; neque non ab incondita sermonis barbarie nonnihil repurgatam. quorsum hoc præmittimus *Lemmaticum Problema*.

VI. Trianguli D P N angulus ad P rectus sit; & in hujus uno crure P N adsignetur punctum F; per F recta ducenda est, quæ reliquum latus D P (protractam nempe) ac hypotenusam D N ità secet, ut ab illis intercepta ad segmentum hypotenusæ lateri primò conterminum datam obtineat proportionem R ad S. Fig. 91.

Hoc ità peragatur licet. Ducatur F H ad P D parallela. & Diametro H N describatur Circulus H F N (is nempe per F transibit, ob angulum H F N rectum) tum connectatur D F; & fiat angulus F H I = ang. F D N. sit etiam R. S :: D F. T. & à puncto I ducatur recta I L K diametrum H N intersecans ad L, & circulo occurrens in K, ità quidem ut sit intercepta L K = T (hoc autem quomodò præstetur in superioribus ostensum) denuò per puncta K F trajiciatur recta C F, ipsam D P secans in X. Dico factum, vel ipse C X. C N :: R . S. connectatur enim recta N K. & quoniam ang. F K I (vel F H I) = F D N, erit triangulum F D C simile triangulo L K C, ac indè F D. D C :: K L. C K. item ob ang. F K N = ang. F H N = ang. X D C, erunt triangula X D C, N K C sibi quoque similia, proindéque D C. C X :: C K . C N . quapropter erit ex æquali F D . C X :: K L. C N. vel permutando F D. C K :: C X. C N; hoc est F D. T (vel R. S) :: C X. C N; quod faciendum erat. Constr. &c.

Advertendum est autem, quod datum punctum F in recta P N indefinitè protensa variè statui potest; vel nimirum inter puncta P, N; vel extra illa partes ad alterutras. item quòd in istorum casuum singulo quoque recta I K (conditione gaudens præstitutâ) plurifariam duci potest; ut antehac inculcatum; unde plures emergent solutiones. at quoad omnes casus persimilis erit constructio, nec ferè diversa demonstratio. quare cur plura?

VIII. Proponatur jam circulus reflectens (is qui præ oculis, cujus cen-

centrum C) datáque sint duo puncta A, X; reperiendum est in circumferentia punctum aliquod; à quo ductæ ad A, X rectæ, altera sit alterius reflexa. || Hoc ità perficimus:

Fig. 92, 93. Conjungantur rectæ A C, X C; & fiat (seorsim) ang. δ = $\frac{1}{2}$ ang. A C X. & in ξδ crure anguli δ sumpto liberè puncto ϖ ducatur ϖ V ad ξδ perpendicularis alterum crus secans in V; & in V ϖ protracta capiatur ϖγ = ϖV; tum dividatur γV in φ, ut sit γφ . φV :: XC . CA;

Lem. præced. perque punctum φ trajiciatur κξ sic ut sit κξ . κν :: CX . CN. denique fiat angulus X C N æqualis angulo ξκν; erit punctum N quale desideramus. Nam ducantur X N, ξν; & fiat ang. C N G = ang. κνγ, assumatúrque P G = P N; & connectatur X G. liquet jam triangula X C N, ξκν similia fore; nec non ipsa C N F, κνφ; & ipsa X P F, ξϖφ; ipsáque demum X F N, ξφν assimilari. quare P F . X F :: ϖφ . ξφ . & X F . F N :: ξφ . φV. & ex æquo P F . F N :: ϖφ . φ V. & antecedentes duplando 2 P F . F N :: 2 ϖφ . φ V. componendóque 2 P F + F N . F N :: 2 ϖφ + φ V . φ V. hoc est G F . F N :: γφ . φV (hoc est) :: X C . C A. ducatur jam N L ad X G parallela; quare est ang. L N G = ang. G = ang. X N G; & X G (X N) . N L :: G F . F N :: X C . C A. porro fiat ang. L N H = ang. X C A; & H N protracta ipsi C A occurrat in M; éstque propterea triangulum H N L simile triangulo H C M; idcircóque H C . C M :: H N . N L. ducatur denuo tangens N Q; estque tum ang. P N Q = rect − C N P = rect − κ V ϖ = ang. δ = $\frac{1}{2}$ X C A; vel 2 ang. P N Q = ang X C A = ang L N H. verùm erat prius 2 ang. X N F = ang. X N L. ergo 2 ang X N F − 2 ang P N Q = ang X N L − ang. L N H. hoc est 2 ang X N Q = ang. X N H. ergo tangens N Q bisecat angulum X N H; indéque consectatur fore rectam H M ipsius X N reflexam; ac ideo esse X C . H C :: X N . H N. atqui fuit priùs H C . C M :: H N . N L quare jam erit ex æquo X C . C M :: X N . N L (hoc est etiam è præmonstratis) :: X C . C A. unde C M = C A. quapropter H M, ipsius X N reflexa transit per A: Quod propositum erat efficere. ||

VIII. Hujusce *Problematis* ità generaliùs propositi varii quidem casus sunt (etenim vel data puncta jacent ambo extra circulum reflectentem; vel utrumque positum est intra circulum; vel unum intra jacet, alterum extra; quinetiam in horum casuum unoquoque pluries conficitur negotium) ast ubique non absimilis erit constructio; sanè nimius essem; meámque pariter ac vestram patientiam macerarem omnes intricati *Problematis* nodos evolvendo; suffecerit ejusce specimen aliquod protulisse. IX Adnota-

IX Adnotabimus tantùm quòd ex *Problematis* hujusce natura constructioneque proposita satis attendenti constabit (utique sicut in *Hypothesibus* antehac tractatis uberiùs est declaratum) duorum tantùm ad easdem axis partes incidentium reflexos ad unum sese punctum decussare. nam aliorum unius (qui subinde potest dari) vel alterius reflexi per ejusmodi punctum transeuntes ad alteris partibus incidentes pertinebunt. || Ex his quadantenus elucescit datis puncti radiantis, oculique positione designari potest linea quævis, in qua dicti puncti species apparebit; incumbit proximè punctum in ea præcisum determinare, ad quo eadem consistit. eo spectat hoc Theoremation.

X. Ab eodem quocunque puncto A manantes duo radii AN, AR in circuli reflectentis peripheria præter illum arcum NR (qui incidentiæ punctis interjacent) intercipiant arcum PS, eorum verò reflexi intercipiant arcum $\pi\sigma$; erit arcus $\pi\sigma$ æqualis summæ vel differentiæ dupli arcûs NR, & arcûs PS. Nam (1) in prima figura; est $PS + SR + RN = PN = N\pi = \pi\sigma + \sigma R - RN$, ergò, pares hinc indè SR, & σR subducendo, erit $PS + RN = \pi\sigma - RN$. proindéque $PS + 2RN = \pi\sigma$. (2). in altera figura; erit $PS + SR - RN = PN = N\pi = RN + R\sigma - \sigma\pi$. quarè rursus æquales auferendo SR, $R\sigma$ manebit $PS - RN = RN - \sigma\pi$ unde transponendo erit $\sigma\pi = 2RN - PS$. Fig. 95, 96.

XI. Etiam hoc *Lemmation* adscribemus: Bisecetur recta NP in E; & ubivis sumatur punctum A; erit $EA = \frac{PA \pm NA}{2}$. Nam Fig. 94.

$$EA = \frac{PN}{2} \pm AN = \frac{PN \pm 2AN}{2} = \frac{PA \pm AN}{2}$$

XII. Exhinc, ut propositum citiùs attingamus, Supposito radios AN, AR (quoad casum præsentem) sibi quàm proximos incidere, punctum designabimus ad quod ipsorum reflexi $N\pi$, $R\sigma$ concurrunt; dicimus utique si dicti reflexi concurrant ad Z; bisectis subtensis NP, $N\pi$ in E, & F; fore FZ . ZN :: EA . NA. || Nam quoniam arcus NR, PS ex hypothesi sunt indefinitè parvi (seu minimi) se habebunt ut suæ subtensæ; nec non idem de arcubus NR, $\pi\sigma$ dici potest. igitur arc. PS . RN :: PS . RN :: PA . RA. (hoc est ob RA, NA nihil, ex eadem hypothesi, differentes) :: PA . NA. ergò, bis componendo, erit $PS + 2RN . RN :: PA + 2NA . NA$. Fig. 95, 96.

hoc est σ ϖ . RN :: PA + 2 NA . NA . est autem arc σ ϖ . RN :: subtensa σ ϖ . RN :: ϖ Z . ZR :: ϖ Z . ZN . ergo ϖ Z . ZN :: PA + 2 NA . NA . & componendo ϖ N . ZN :: PA + 3 NA . NA & antecedentes subduplando FN . ZN :: $\frac{PA + 3 NA}{2}$. NA . denique dividendo FZ . ZN :: $\frac{PA + NA}{2}$. NA . est autem EA = $\frac{PA + NA}{2}$. ergò tandem est FZ ZN :: EA . NA : Q. E. D.

XIII. Hinc colligitur punctum Z esse locum ipsissimum, circa quem puncti Z imago consistit; oculi respectu in reflexo GN ϖ constituti, Fig. 95, 96. tanquam ad O. etenim superiùs nec semel argumentis, ut mihi videtur, admodum luculentis adfirmatum est (ut jam ad instar regulæ legisve ratum, fixúmque censeri queat) isthic imaginem versari, ubi propiorum incidenti principali (hoc est ei cujus reflexus oculi centrum transiens axis Optici vicem subit) radiorum reflexi principalem illum reflexum intersecant; itaque circa Z in hoc casu versatur.

XIV. Et hoc argumentatione collegi, non illâ quidem incertâ vel ambiguâ, sed nec ad *Geometrici* rigoris amussim præ illa quam in præcedentibus usurpavi (quanquam & hæc è cognatis fontibus profluxerit) adeò exactâ; concisâ tamen, & facili, talique quæ conclusionis adsertæ causam apprimè detegit. Enim verò si pleraque cuncta, quæ se oggerunt huc attinentia, minutatim ac morosè persequi vellem, immane quantum tædii (commodo vestro fortassè non tanto) mihimet accerserem, & temporis plurimum vestri pariter ac mei exhaurirem. sufficerit itaque jam, & posthac in reliquis Hypothesibus sufficiat, viâ quàm brevissimâ (modò tamen certissimâ) metam attingere. De convexis hactenus; ad concava proximè nos conferemus, aliquanto breviùs exponenda. ||.

Lect.

Lect. X.

I. IN postrema Lectione quod spectavimus punctum circuli convexo alluxit; nunc partes concavas irradians aliud, at magìs ἐν παρέργῳ, contemplabimur. & quidem casuum præcipuorum diversitatem imprimis distinguemus. Nempe radiet punctum A in circulum reflectentem, cujus centrum C; connexaque recta A C protendatur indefinitè; quo posito.

II. 1. Incidat radius A N; & sit $AN = AC$; erit ipsius A N reflexus, puta $N\alpha$, ad A C parallelus. Fig. 97.

Hoc è suprà generatim ostensis constat; & facilè jam patet, connexâ C A. etenim est ang. $ACN = ANC$; ob A C, A N, ex Hypothesi pares; & ang. $ANC = \alpha NC$, propter reflectionem; adeoque ang. $ACN = \alpha NC$; unde sunt A C, $N\alpha$ sibi parallelæ.

III. 2. Incidat radius A M major ipsâ A C; ejus reflexus (puta $M\alpha$) cum axe directè procedens conveniet ultra centrum, respectu puncti A; (hoc est centrum C puncto radianti, concursuique interjacebit). Fig. 98.

Nam ob $AM \sqsubset AC$, erit ang. $ACM \sqsubset AMC = CM\alpha$. ergo ang. $BCM + CM\alpha \sqsupset$ ang. $BCM + ACM = 2$ rect. quare $M\alpha$, C B convenient infra C M ad partes α B; velut ad K.

IV. 3. Incidat radius A R; & sit A R minor ipsâ A C; ejus reflexus, puta $R\alpha$, axi retrò protractus occurret. (hoc est ut radians centro, concursuique sit interjectum). Fig. 99.

Nam hic ob $AR \sqsupset AC$; erit ang. $ACR \sqsupset$ ang $ARC =$ ang. αRC. quapropter ang. $DCR + \alpha RC \sqsubset 2$ rect. unde patet ipsas D C, αR portractas infra C R concurrere.

V. Horum

V. Horum casuum primus ad unum duntaxat ab una axis parte radium pertinet, qui reliquos aliis casibus convenientes medius disterminat. de posterioribus itaque duobus separatim paullò dispiciamus; Sit jam itaque primò AC = AG = Aγ; unde quilibet incidens cavo GBγ radius (ut AN) major erit quam AC; hujus itaque reflexus axem secet puncto K; dico, si semidiameter CB dividatur in Z; ut sit CZ. ZB :: AC. AB; fore CK ⊏ CZ. etenim ob angulum ANK bisectum, erit AC. CK :: AN. NK. vel permutando AC. AN :: CK. NK. est autem AC. AB ⊐ AC. AN ergo AC. AB ⊐ CK. NK ⊐ CK. BK. ergò cùm sit, ex hypotheſi, CZ. ZB :: AC. AB; erit CZ. ZB ⊐ CK. BK. componendóque CB. ZB. ⊐ CB. KB. unde ZB ⊏ KB; seu CZ ⊐ CK: Q. E. D.

Fig. 101.

Fig. 100.

VI. Hinc punctum Z est limes infra quem, Versus centrum, nullus reflexus axem intersecat.

Coroll. Hinc si puncta Z, ζ sint limites punctorum A, α (quorum A remotius) erit CZ ⊏ Cζ.

Nam BC. AC ⊐ BC. αC. componendóque AB. AC ⊐ αB. αC. hoc est ZB. ZC ⊐ ζB. ζC. vel compositè CB. ZC ⊐ CB. ζC. ergò ZC ⊏ ζC.

VII. Quinetiam erit in hoc casu; ANq — ACq. CNq :: AC. CK. Nam ducatur KH ad CN parallela, protractæ AN occurrens in H; & connectatur CP; & eodem planè modo quo superiùs (in iis quæ circa convexas partes attigimus) ostendetur fore AN × NP. CNq :: AK. CK. unde divisim erit AN × NP — CNq. CNq :: AC. CK. est autem AN × NP = ANq — AN × AP = ANq —: ACq — CNq = ANq — ACq + CNq; adeóque AN × NP — CNq = ANq — ACq. ergò demum erit ANq — ACq. CNq :: AC. CK: Q. E. D.

Notetur; si fuerit AC minor semisse semidiametri circuli reflectentis, quòd punctum A duos focos habebit ad easdem centri partes, quorum alter ad partes D, alter ad B pertinebit; sin AC major fuerit istâ Semisse, focis qui ad diversos vertices B, & D pertinent, centrum C interjacebit.

VIII. Etiam hoc interseram *Theorema*, præmissis conforme: Si fiat 2 CK. CN :: CN. F; itémque 2 CA. CN :: CN. E; &

& demittatur NQ ad AC perpendicularis, erit $CQ = F - E$. Nam (ut suprà) est $CA . CK :: F . E$. quare dividendo erit $CA - CK . CK :: F - E . E$. Item hic erit $ANq - ACq = 2\,AC \times CQ + CNq$. adeóque $2\,AC \times CQ + CNq . CNq :: AC . CK$. hoc est, (ob $CNq = 2\,AC \times E$.) $2\,AC \times CQ + 2\,AC \times E . 2\,AC \times E :: AC . CK$. hoc est $CQ + E . E :: AC . CK$. quare dividendo $CQ . E :: AC - CK . CK$. ergo $F - E = CQ$. Q.E.D.

IX. Porrò, si duorum quorumvis radiorum AN, AR reflexi NK, RL axem secent punctis K, L; erit $CK . CL :: ARq - ACq . ANq - ACq$. Nam ob $CK . AC :: CNq . ANq - ACq$. & $AC . CL :: ARq - ACq . CNq$. erit ex æquo perturbatè $CK . CL :: ARq - ACq . ANq - ACq$.

X. Hinc si radius AR sit ipso AN obliquior; erit $CK \sqsupset CL$. Nam $ARq - ACq \sqsupset ANq - ACq$.

XI. Hinc palàm est reflexos NK, RL sese priùs quàm axem decussare.

XII. Accipiantur porrò bini pares arcus NR, RX; & incidentium AN, AR, AX reflexi cum axe conveniant punctis K, L, M; dico spatium LM, obliquiorum occursibus interjectum, majus esse spatio LK, quod rectiorum continetur occursibus. Nam è suprà monstratis constat esse $ANq + AXq \sqsupset 2\,ARq$. proindéque fore $ANq + AXq - 2\,ACq \sqsupset 2\,ARq - 2\,ACq$: ac indè $ANq - ACq . ARq - ACq \sqsupset ARq - ACq . AXq - ACq$. hoc est $CL . CK \sqsupset CM . CL$. vel $CM . CL \sqsubset CL . CK$. quare $CM + CK \sqsubset 2\,CL$. & ideò $LM \sqsubset KL$. Fig. 102.

XIII. Hinc rectiùs ingruens lux à reflectione versus axem condensatior evadit.

XIV. Quidni demùm rursus ex his inferatur, visibilis A imaginem circa reflexorum metam Z, oculo uspiam in AZ constituto, apparere?

XV. Adversatur saltem (id quod experiendo deprehendetur) oculo uspiam in ZB collocato confusiorem apparentiam objici; quippe cum

cùm eum tunc reflexi convergentes appellant; & imago distinctior Z post oculum consistat. quin ejusmodi complures apparentias observabitis ipsi si lubet, & ex his deducetis ||

XVI. Prætereà, *dato oculi centro*, *velut O*, *quomodo designandus sit ipsum pervadens reflexus* (ceu $N\varpi$) è suprà tractatis aliquatenus
Fig. 103. adparet. nec inibi generaliùs expositum *Problema* libet hic reponere.

XVII. Quinetiam antedicta recensendo constabit, si bisecentur subtensa PN in E; & subtensa $N\varpi$ in F; ac fiat $FZ . ZN :: EA . NA$; radiantis imaginem, visûs O respectu, circa punctum Z consistere. planè similis est discursus, quorsum καταζητεῖν. ||

XVIII. Supereſt tantùm, ut de posteriore quem innuebamus casu paucula subdamus. Eò, ponatur $AC = AG = A\gamma$; indè quilibet incidens cavo $GB\gamma$ radius ipsâ AC minor erit; sit talis alicujus AN reflexus $N\varpi$; qui nempe retro productus cum axe conveniet; puta ad K. Etiam hìc præcedentibus conformia deprehendentur, & suppari demonstrabuntur modo; qualia sunt nempe

XIX. $AC . AN :: CK . KN$.

XX. $ACq - ANq . CNq :: AC . CK$.

XXI. Radii AR ipso AN obliquioris reflexus cum axe concurrat in L; erit $CK . CL :: ACq - ARq . ACq - ANq$, ac indè

XXII. $CK \sqsupset CL$.

XXIII. Incidentium rectiorum (pares, ut superiùs, arcus in reflectente sumendo) reflexi concursus habent à se minoribus intervallis disjunctos. hæc, inquam, & alia quoad reliquos casus præmonstratis conformia, vel agnata persimili quoque quoad hunc casum methodo comprobantur. quare pluribus tempero; sed enim id quod ubique præcipuum etiam hìc exertiùs ostendam; præmisso tamen hoc, ad sequentia quoque concidenda non inutili, *Lemmatio:*

XXIV. Detur recta BC; in ea protracta designandum est punctum,
Fig. 104. velut Z; ità ut BZ ad CZ datam obtineat rationem, puta I ad R. || Id facilè sic exequimur, || 1. Si

1. Si fuerit $I \sqsubset R$; fiat $I - R . R :: BC . CZ$; quare componendo erit $I . R :: BZ . CZ$. ergò factum. Fig. 105.

2. Sin $I \sqsupset R$; fiat $R - I . I :: BC . BZ$. ergò rursus componendo $R . I :: CZ . BZ$. vel inversè, $I . R :: BZ . CZ$.

XXV. Fiat jam $CA . AB :: CZ . BZ$; Dico punctum Z esse metam, citra quam (respectu centri C) nullus reflexus axem decussabit; hoc est præmissis insistendo, fore $CK \sqsubset CZ$.

Nam ducatur NT circulum contingens ad N. erit ergo $NK . NA :: KT . AT \sqsupset BK . AB$. quare $NK . NA + AB . BZ \sqsupset BK . AB + AB . BZ = BK . BZ$. est verò $NK . NA :: CK . CA$. & $AB . BZ :: CA . CZ$. ergò $CK . CA + CA . CZ \sqsupset BK . BZ$. hoc est $CK . CZ \sqsupset BK . BZ$. vel permutando $CK . BK \sqsupset CZ . BZ$. unde dividendo $CB . BK \sqsupset CB . BZ$. adeóque $BK \sqsubset BZ$. unde liquet propositum.

XXVI. Exhinc (ut in casibus antè pertractatis) consectatur ejusmodi punctum Z esse locum ipsissimum imaginis punctum A exhibentis oculo, puta O, in axe CA constituto; patétque quàm longè passim ab Opticis; nominatim à novissimis *Stevino*, *Hobbio*, *Fabrioq;* in eo assignando loco aberratur; quorum ex sententia versatur is ad punctum (puta Q) tanto semotum à vertice B intervallo, quanto radians A ab ipso B distat. id quod præterquam quòd nullâ verisimili ratione nititur (imò rationi prorsus adversatur, cùm nullus omnino radius oculum ingrediatur tanquam à puncto Q proveniens) experientiâ facilimè refutatur. Nam si tanquam circa punctum A accensa candela speculo cavo G B γ exponatur, oculo velut ad O sito longè majori distans intervallo conspicietur, quàm ipso BQ, quod ipsam AB exæquat. quinimò tantillo versus centrum illum adducendo non æquali distantiâ, sed admodum majori videbitur elongari; tantâ circiter ad sensum, probabilémque conjecturam; quantam proportio requirit à nobis præstituta. quo circà discursus noster experientiæ suffragio constabilitur.

XXVII. Quod demùm attinet ad locum imaginis respectu visûs extra radiationis axem positi; determinatur is eodem ac in casibus antecedaneis modo; bisecando scilicet ipsas NP, Nπ punctis E, F; faciendóque $EA . AN :: FZ . ZN$. Adnotandum saltem in rectioribus reflexis imaginem extra circulum consistere; sed in obliquioribus intra illum; nempe si fuerit $AE \sqsubset AN$ punctum Z ultra axem Fig. 106.

CB existet; sin $AE \sqsupset AN$, punctum Z versus ϖ existet; sin $AE = AN$; concursus infinitè distabit; seu proximus reflexus ipsi Nϖ parallelus erit.

Not. ductâ AQ ad CB perpendiculari, si $AE = AN$; erit $AN = \sqrt{\frac{AQq}{3}}$. Nam $AQq = AP \times AN = 3AN \times AN$

Fig. 106. $= 3ANq$; itaque punctum N, istos casus disterminans, facilè designatur.

Rationem ipsi tantillùm attendentes perspicietis; mihi sanè cunctas evolvendo minutias non animi satis, non otii suppetit.

XXVIII. Juvabit his unam, loco forsan opportuniore prætermissam, observatiunculam attexere. Si fuerit Z radiantis A Imago, vicissim erit A radiantis Z Imago. è dictis quoad speciales casus facilè cernitur hoc consectari. quin & hinc generatim verum apparebit satis: Si fuerit Z ipsius A imago, tantum unus idcircò ab A manantium inflexus per Z transibit. (hoc imagini proprium esse sæpiùs in decursu inculcata satis arguunt, superque) quare reciprocè solus unus ab Z manantium inflexus per A transibit (nam si duo tales per A transire dicantur, etiam indè duo per Z transibunt, contra hypothesin) erit igitur A ipsius Z imago. Merebatur hæc (compendio bene serviens, & casus inter se varios conferentibus affundens lucem) observatio generalibus intertexi; nisi quòd non omnia se nobis statim produnt; & quædam in abstractione summa non ità facilè vèl explicari possunt, vel comprobari.

A Catoptricis jam aliquando manum. quæ contentus ità quadantenus promovisse, haud disparia (certè magìs nova, miniméque protrita) circa refractiones sphæricas, seu circulares, attentabo.

LECT. XI.

I. *Catoptricâ circulari defuncti ad Dioptricam promovemur*; quorsum incidentium quotcunque refractis unâ simulo perâ delineandis, adeóque refractionum symptomatis organicè pertentandis modum imprimis exponemus, præ cæteris, opinor expeditum. Seorsim ad v γ æqualem diametro (N G) circuli refringentis describatur circulus v ϖ γ. item habeat v γ ad S γ rationem illam, quæ refractiones determinat (illam autem deinceps, ut antehac, constanter nuncupabo rationem I ad R) & super diametro S γ describatur quoque circulus S H γ. Incidat jam radius quilibet M N P, cui conveniens designandus est refractus. ut hoc assequamur, circulo adposito à V adaptetur v ϖ = N P; & centro γ per ϖ descriptus circulus secet circulum S H γ in H; connexáque γ H circulum v ϖ γ intersecet in ξ. demùm connexâ v ξ, circulo N P G accommodetur N X = v ξ; erit N X ipsius N P refractus. Etenim (ductis G P, G X) est γ H. γ ξ :: (γ S γ v ::) I. R. hoc est γ ϖ. γ ξ :: I. R. hoc est G P. G X :: I. R. cùm itaque sint ipsæ G P, G X recti sinus angulorum G N ϖ, G N X (quorum G N P est angulus incidentiæ) liquet propositum. Fig. 107. 108.

II. Ad ipsa *Symptomata* progrediamur exponenda radiis ad circulum refractis competentia; quorum illa pro more primò pertractabimus, quæ radianti puncto conveniunt ad infinitam quasi distantiam posito, seu parallelos ad sensum radios ejaculanti. Quocirca per circuli refringentis Centrum C punctúmque de longinquo radians protendatur recta A C Z, tum fiat B Z. C Z :: I. R; nec non dividatur C Z in F, ut sit F Z. F C :: I. R; & centro F per Z describatur circulus E G Z. his peractis, accipiatur jam quilibet ad A C parallelus M N P (convexis incidens an concavis partibus perinde fuerit) dico si recta N C (ab incidentiæ nempe puncto per refringentis centrum ducta) circulo E G Z protracta occurrat in G, & Fig. 109.

 in

in axe capiatur CK = CG; connectatúrque recta NK, fore NK ipsius MNP refractum. Connectantur enim rectæ FG, BG; & quoniam est BZ.CZ :: (I.R ::) FZ.FC; erit permutando
Fig. 109. BZ.FZ :: CZ.FC. dividendóque BF.FZ :: FZ.FC. itaque patet triangula BFG, GFC (latera scilicet habentia circa communem angulum GFC proportionalia) similia fore. quamobrem erit BG.GF :: GC.CF. seu permutatim BG.GC :: GF.CF. hoc est BG.GC :: FZ.CF :: I.R. verùm in triangulis BCG, NCK est BC = CN, & CG = CK; & ang. BCG = NCK; adeóque BG.GC :: NK.CK. quare erit quoque NK.CK :: I.R. ergò, *secundum generatim antehac ostensa, liquet NK ipsius MN refractum existere.

* *Lect.* 3. *numero.* 10.

Coroll. Adnotetur esse triangula BFG, GFC similia; ac esse BG.CC :: I.R; & ang. BGF = GCF; & esse BF, FG, FC ÷÷ &c.

III. Ex hoc (sanè pulchro, perutilique *Theoremate*) cùm particularis exoritur methodus hujusmodi quotcunque refractos expeditissimè seu delineandi, seu computandi; tum ipsorum præcipua *symptomata* facilimè discernuntur ac demonstrantur. qualia sunt, quæ in subjectis exhibentur *Corollariis*.

IV. Patet hinc punctum Z esse limitem ultra quem (respectu centri) nullus axem intersecat refractus; seu perpendicularis ipsius AB (vel ei saltem quàm proximè adjacentis radii) refractum ad Z termi-
Fig. 110. nari. quia nimirum est CZ ⊏ CG, vel CR.

V. Consequitur etiam, si duorum incidentium MN, QR (quorum QR sit obliquior) refracti conveniant cum axe punctis K, L, fore
Fig. 111. CK ⊏ CL. Etenim si rectæ NC, RC ad circulum refractarium (ità circulum EGZ meritò subinde nominabimus) producantur, ut ipsum secent punctis G, H; liquet esse CG ⊏ CH; adeóque CK ⊏ CL. Hinc.

VI. Ad easdem partes incidentium refracti sese priùs intersecant quàm axem; (veluti puta refracti NK, RL sese decussant in X.)

Fig. 111. VII. Quinetiam, si in primo casu per centrum C ducatur recta VI ad BZ perpendicularis, dictóque circulo refractario occurrens ad I; & fiat CY = CI, patet punctum Y esse limitem refractionis cite-

citeriorem: erit enim connexa VY refractus obliquissimi radii, ceu TV, circulum refringentem contingentis.

VIII. Item, in secundo casu si recta CVI circulum EGZ tangat in I, & adsumatur $CY = CI$, erit punctum Y citimus alter refractorum limes. Etenim connexa VY refractus erit incidentis (puta VT) ad BC paralleli; qui certè cunctorum obliquissimus erit hujusmodi refractionem patientium. quum enim (*è præmissis) connexâ FI, sit $FI.CF::I.R$. hoc est sinus rectus anguli FCI (vel anguli CVT) ad sinum totum, ut I ad R; nullus ipso TV obliquior medium BNV penetrabit; at ipse quicunque talis repercutietur; velut $\varphi\psi$ in $\varphi\zeta$. Fig. 112. *Lect.3.num.7.

IX. Cæterùm hic (tametsi præter ordinem non nihil, extráque suum locum) egregiam quandam & præsertim notabilem istius, quem nuncupavimus, refractarii circuli proprietatem interseremus: Omnium à puncto B promanantium, & a circuli EGZ cavis partibus refractionem patentium (juxta casus prænominatos respectivam) refracti per punctum C transibunt.

Nam ejusmodi quilibet incidat radius BG, & (stantibus quæ præstructa præmonstratáque sunt) triangula BGF, GCF similia sunt; angulúsque BGF par angulo GCF; itémque $FG.CF::I.R$; est autem FG ad CF, *ut Sinus anguli* GCF *hoc est anguli BGF) ad Sinum anguli CGF. ergò Sinus anguli* BGF *(qui est angulus incidentiæ) ad Sinum anguli* CGF se habet, ut I ad R. ergò CGC est refractus ipsius BG: Q. E. D. Fig. 113, 114.

Nota. Si qui ad convexas hujusce circuli partes incidunt, ità reflectantur, ut perpetuo Sinus anguli incidentiæ ad Sinum anguli reflexi se habeat ut I ad R; etiam reflexi per C transibunt.

Hinc habetur unum (quoad hos casus) è præcipuis in *Dioptrica* desideratum, perquam utile; Superficies simplicissima radios ab uno puncto procedentes ità refringens, ut tanquam ab altero proveniant; id quod demonstrationis adductus commoditate *Corollarii* loco (licèt ad aliam pertinens hypothesin) hic apponere non dubitavi, redeamus è diverticulo.

X. Notandum porrò, quòd diversos refringentes circulos, iisque competentes, modo præstituto determinatos, refractarios adsumendo, rectæ CB, EZ, CE, CZ, CF easdem in uno, quas in altero quovis proportiones observant; id quod facilimè demonstratur; & satis elucescit.

cescit ex eo, quod earum omnium ad se proportiones in eodem ubique modo fundantur in una ratione I ad R. verbis, & Schematis effingendis parco. Pro sequentibus hæc adjungo *Lemmatia*.

XI. 1. Sint tria quanta A, B, C (quorum maximum A) se deinceps æqualiter excedentia; sint etiam altera totidem M, N, O; & sit A.B :: M.N; ac B, C :: N, O; dico fore quoque tria M, N, O in ratione continua *Arithmetica*. Nam ob A.B :: M.N. erit divisim A — B.B :: M — N.N. item ob B.C :: N.O. erit per rationis conversionem B.B — C :: N.N — O. ergò erit ex æquo A — B.B — C :: M — N.N — O. itaque cùm sit ex Hypothesi A — B = B — C; erit etiam M — N = N — O: Q.E.D.

XII. 2. In circuli quadrante Z Q trium arcuum Z G, Z H, Z I Sinus recti F α, F ϵ, F γ æqualiter crescant (ut nempe sit $\alpha\epsilon = \epsilon\gamma$) dico fore G α — H ϵ ⊐ H ϵ — I γ.

Fig. 115. Nam ducatur subtensa G I ipsam H ϵ secans, in X; & sint X R, I S ad F Q parallelæ; patet ipsas G R, X S æquari hoc est fore G α — X ϵ = X ϵ — I γ; unde liquidum est esse G α — H ϵ ⊐ H ϵ — I γ: Q.E.D.

XIII. 3. Sunto concentrici bini circulorum quadrantes F Z X, F $\zeta\xi$; & ad F Z parallela ducatur recta quævis L G γ, circulos intersecans punctis G, γ; dico fore F Z — L G ⊏ F ζ — L γ.

Fig. 116. Nam connexa F G circulum $\zeta\gamma\xi$ producta secet in T; connectantúrque subtensæ Z G, ζ T (hæc ipsam L γ secans in S) Patétque jam rectas Z G, ζ T parallelas esse; adeóque quadrangulum Z G S ζ fore parallelogrammum; unde G S = Z ζ; adeóque F ζ — L S = F Z — L G. ergo F ζ — L γ ⊐ F Z — L G: Q.E.D.

XIV. Sint jam tres radii paralleli M N, Q R, V X, à se distantes æqualiter (hoc est ut ductis N v, R ρ, X ξ ad axem A C perpendicularibus sit X ξ — R ρ = R ρ — N v) & ipsorum refracti cum axe

Fig. 117. conveniant punctis K, L, O; erit obliquiorum concursibus interjectum spatium O L majus spatio L K, quod à rectiorum occursibus continetur.

Nam ducantur N C, R C, X C circulo refractario occurrentes punctis G, H, I; & ad has à refractarii centro F ducantur perpendiculares F α, F ϵ, F γ; & quoniam triangula C X ξ, C F γ similia sunt; erit X ξ. C X :: F γ. C F. item simili de causa, est C R (C X). R ρ

$R\rho :: CF . F\zeta$; quapropter erit ex æquo $X\xi . R\rho :: F\gamma . F\zeta$. non dispare ratione constabit esse $R\rho . N\upsilon :: F\zeta . F\alpha$. ergò cùm tres $X\xi$, $R\rho$, NV se æqualiter excedant; *etiam tres $F\gamma$, $F\zeta$, $F\alpha$ se æqualiter excedent; unde consequetur esse $C\alpha - C\zeta \sqsupset C\zeta - C\gamma$; nec non esse * $\alpha G - \zeta H \sqsupset \zeta H - \gamma I$; adeóque conjunctim $CG - CH \sqsupset CH - CI$; hoc est $CK - CL \sqsupset CL - CO$; hoc est denuò $LK \sqsupset OL$: Q.E.D.

* 21 hujus Lect. Hyp.
* 22 hujus Lect.

XV. Hinc apparet rectiùs illapsam refringenti lucem magìs inspissari; versúsque punctum Z in arctius redigi; maximam proinde vim ejus isthic exeri; focúmque combustionis (ad solem) ibi versari.

XVI. Consectatur etiam radios (hujusmodi saltem parallelos) quò rectiores oculo (cujus nempe superficies refractionis munus obeuntes aut Sphæricæ sunt, aut Sphæricas aliquatenus referunt) incidunt, eò faciliùs ab ipso readunari, seu propiùs recolligi.

XVII. Quinimò tandem ex his colligitur visibilis longinqui puncti speciem oculo, in axe posito, circa punctum Z apparere. Etenim ab ei adjacentibus partibus refracti cùm præ cæteris perpendiculares (vi proinde fortiores, & recollectu paratiores) neque non copiosiores affluunt; quibus ex causis imaginis positio dependet; ut jam sæpiùs admonitum: — ἐχθρὸν δέ μοι ἐστὶν αὖτις ἀριζήλως εἰρημένα μυθολογεύειν. cæterùm hâc defunctus curâ tantisper respirabo. ||

Lect.

LECT. XII.

I. *Parallelorum ad circulum refractionem patientium in contemplatione defixus, præter alia præcipua symptomata, locum ultimè determinavi, quam isti repræsentant, imaginis, oculo in axe constituto.* res jam postulat ut eandem definiamus oculi gratiâ secùs collocati. veruntamen unam priùs haud inutilem adnectam observationem, ad præcedentia spectantem; hanc utique:

Fig. 118, 119. II. Si duo Segmenta N B R, $\nu\beta\rho$ latitudines (vel subtensas) N R, $\nu\rho$ æquales habeant; quorum $\nu\beta\rho$ ad majorem pertineat circulum; hoc cùm potentiùs aduret, tum objectum visibile clariùs atque distinctiùs exhibebit. Sint enim C, κ circulorum refringentium centra; & circuli iis competentes refractarii sint E G Z, $\epsilon\gamma\zeta$; horúmque centra F; ϕ; tum parallelorum punctis N, ν incidentium sint refracti N D, $\nu\delta$; dico tum fore $DZ \sqsubset \delta\zeta$. || Ducantur enim rectæ N C G, $\nu\kappa\gamma$; hísque perpendiculares rectæ F L, $\phi\lambda$. éstque $CN . \nu\varpi :: CN . NP :: CF . FL$. & $\nu\varpi . \kappa\nu :: \phi\lambda . \kappa\phi$. ergò (rationes sibi pares adjungendo) est $CN . \nu\varpi + \nu\varpi . \kappa\nu :: CF . FL + \phi\lambda . \kappa\phi$. hoc est $CN . \kappa\nu :: CF \times \phi\lambda . FL \times \kappa\phi$. est autem
23. 11 Lect. $CN . \kappa\nu :: CF . \kappa\phi :: CF \times \phi\lambda . \kappa\phi \times \phi\lambda$. quapropter erit $CF \times \phi\lambda . FL \times \kappa\phi :: CF \times \phi\lambda . \kappa\phi \times \phi\lambda$; & idcircò $FL \times \kappa\phi = \kappa\phi \times \phi\lambda$; indéque $FL = \phi\lambda$. hinc consequetur fore $CF - CL \sqsubset \kappa\phi - \kappa\lambda$; nec non $FZ - LG \sqsubset \phi\zeta - \lambda\gamma$; proindéque conjunctim $CZ - CG \sqsubset \kappa\zeta - \kappa\gamma$; hoc est $CZ - CD \sqsubset \kappa\zeta - \kappa\delta$; hoc est demum $DZ \sqsubset \delta\zeta$; exhinc lux ab arcu $\nu\beta\rho$ magis constipata, (in spatium quippe restrictius $\delta\zeta$ coacta) violentiùs operabitur, & a fonte magis ad punctum accedente promanare visa punctum radians distinctiùs exhibebit; id quod institutum fuit ostendere; quo rei passim observatæ, nec exilis in perspiciliorum constructione usûs ratio constaret. || In ordinem jam recidimus; ut puncti nempe longinqui locum apparentem indagemus, oculi respectu quomodocunque situm; cum in finem conficiendum venit imprimis hujusmodi *Problema*, rectum definiens in qua locus iste versatur: III Dato

III. Dato circulo refringente; punctóque quovis X; per punctum X ducatur recta, quæ sit incidentis ad datam positione rectam C B parallelè refractus.

Si punctum datum X ponatur in axe C B; facillimè perficitur negotium; etenim si fiat R . I : : C X . T; & centro X intervallo ipsam T adæquante describatur circulus refringentem intersecans in N; è præmissis admodum patet connexum N K per N incidentis ad B C paralleli refractum esse; quia scilicet est C X . X N : : C X . T : : R . I. Fig. 120.

IV. Verùm extra casum hunc, & alios particulares nil huc attinentes, generatim conceptum *Problema* Solidum est, aut plusquam Solidum (ut ex analysi non difficilè perspiciatur) & certè viâ consuetâ, per lineas vulgò receptas, constructu perquam arduum & operosum; ità quidem ut licèt mihi non penitus incomperta sit methodus ejusmodi constructionem non unam moliendi, ægrè possim adduci, tantum ut ei temporis, tantum laboris impendam, quantum exposcit; suffecerit itaque modum indigitare, quo per lineam quandam sibi peculiarem, punctatim facili negotio designabilem, ità construi possit, ut unà suam naturam ac indolem prodat. modus ille sic habet.

V. Connectatur recta C X; fiátque C X . C V : : R . I, & per punctum V indefinitè protendatur recta F G, datæ C B parallela; tum è refringentis centro C rectæ quotcunque C I exeant, rectam F G decussantes punctis H; & centro X, intervallo rectas V H perpetuùm æquante descripti circuli rectis C I occurrant punctis N; per hujusmodi puncta quævis linea transit, quam innuimus expositi *Problematis* Solutioni deservituram; ejus scilicet, & dati circuli refringentis intersectio quæpiam incidentiæ punctum erit, ad quod per X ducta recta refringetur in aliquam ipsi B C parallelam; seu vicissim hæc in illam. Sit enim talis intersectio quævis N; & ducta N X ipsam B C secet in K; & sint N M, ac X T ad B C parallelæ. Estque tum C K . K N : : (T X . X N : : T X . V H : : C X . C V : :) R . I; unde secundum ostensa liquet N X K refractum esse ipsius M N; quod oportebat factum. Ità *Problema* [illegible] utcunque licebit exequi, nec non ejusce qualitatem intueri; quot refracti per oculi centrum meent definire, singulósque reipsâ designare; quæ longiusculum esset sigillatim exponere, cum autem eâtenus imaginis locus Fig. 121.

M habeatur

habeatur determinatus; ſuccedit ut breviter etiam ipſiſſimum in ſingulo tali refracto punctum oſtendamus, ad quod illa conſiſtit. in cujus rei gratiam hoc quaſi *Lemma* præſternemus.

VI. In circulo A N B, cujus centrum C, ſint Semidiametro C A perpendiculares N E, R F; item Semidiametro C B ſint perpendicu-
Fig. 122. lares N G, X H; ſint autem C E, E F ipſis C G, G H proportionales; & arcus N R, N X indefinitè parvi; ſeu quaſi minimi dictâ conditione præditi; dicimus arcum N R ad arcum N X rationem habere conflatam è rationibus ipſarum CE ad CG, & NG ad NE; vel eſſe arc. N R, N X : : CE × NG . C G × N E. Nam per N ducatur V T tangens circulum; ipſiſque F R, H X occurrens punctis T, V. eſt itaque (propter Summam ex Hypotheſi parvitatem dictorum arcuum) arc N R . C N : : N T . C N : : E F . E N. item C N . arc N X : : C N . N V : : N G . G H. quapropter erit arc N R . C N + C N . arc N X = (E F . E N + N G . G H = E F . G H + N G . E N =) C E . C G + N G . E N. hoc eſt arc N R . arc N X = C E . C G + N G . E N: Q. E. D. (vel arc N R . N X = C E × N G . C G × E N.)

VII. Sit jam radii cujuſvis talis M N P, refringentem interſecantis punctis N, P, refractus N ϖ (refringentem nempe denuò ſecans in ϖ) huic autem indefinitè vicinus (& quaſi proximus) adjaceat radius Q R S, cujus itidem refractus R σ (refringenti nempe rurſus occurrens in σ), priorem N ϖ decuſſans in Z, biſecentur autem ſubtenſæ N P, N ϖ punctis G, E: Dico rationem N Z ad G Z componi è rationibus N G ad N E, & C E ad C G.

Fig. 123, 124. Nam ducantur rectæ C E (hæc ipſam R S quoque ſecans in F) & C G; nec non C I ad R σ perpendicularis; & in protracta C G ſumatur C H = C I; & per H ducatur X Y ad N ϖ parallela, ſeu perpendicularis ad C H; unde eſt X Y = R σ; & arc N X = Y ϖ; & arc X Y = arc R σ; adeóque arc N R ± σ ϖ = 2 arc N X. Eſtque præterea C G . C E : : R . I : : C I . C F : : C H . C F; adeóque permutatim C G . C H : : C E . C F. ergò (juxta præcedentem) eſt arc. N R . N X = N G . N E + C E . C G. ad hæc ob illam (quæ ponitur) arcuum N R, S P, ϖ σ exiquitatem, erit arc N R . ϖ σ : : ſubtenſa N R . ϖ σ : : N Z . Z σ : : N Z . Z ϖ. ergò (inverſè componendo, vel dividendo, tum & conſequentes ſubduplando) arc N R . $\frac{\text{arc } NR \pm \varpi\sigma}{2}$: : N Z . $\frac{NZ \pm Z\varpi}{2}$. atqui velut modo dictum)

arc

arc $\frac{NR \pm : \sigma r}{2} = NX$; item est $\frac{NZ \pm : Z\sigma}{2} = GZ$. erit ergò arc Fig. 124.
NR.NX :: NZ.GZ. quapropter erit (juxta præcedentem) $NZ.GZ = NG.NE + CE.CG$.

VIII. Porrò liquet punctum Z esse locum imaginis, quem expetimus, oculo conspicuæ in recta N σ constituto; utpote circa quod viciniorum ipsi NP radiorum refracti ipsam N σ intersecant; qua de re multoties egimus, ut pigeat eò plura ταυτολογεῖν.

IX. Facilè verò, Secundum *Theorema præmissum*, designatur punctum Z. Ducatur nempe CG ad refractum NK perpendicularis; & ad connexam CN ducatur perpendicularis GV; & per V ducatur VZ ad CK parallela, secans ipsam NK in Z. factum erit. Nam, connexâ GE, liquet angulos GEC, GNC (circumducti Fig. 125.
nempe per N, E, G, C circuli subtensæ GE insistentes ambos) æquari; hoc est angulos GEC, VGC æquari. quapropter (utrique rectum adjiciendo) toti NEG, ZGV æquantur. item alterni GNE, VZG æquantur. ergò triangula GNE, VZG similia sunt, unde $NG.NE :: ZV.ZG$. itaque $CE.CG + NG.NE = CE.CG + ZV.ZG$. verùm (ob refractionem) est $NK.KC :: I.R :: CE.CG$; hoc est $NZ.ZV :: CE.CG$. est igitur $CE.CG + NG.NE = NZ.ZV + ZV.ZG$; hoc est $CE.CG + NG.NE = NZ.ZG$. ergò punctum Z conditionem obtinet, imaginis loco congruentem, è mox ostensis. adeò liquet propositum.

X. Quin subnotamus rectam NK ad punctum Z ità dividi, ut sit $NZ.ZK :: NGq.CGq$. Etenim est $NZ.ZK :: NV.VC :: NVq.VGq :: NGq.CGq$.

XI. Subjiciam & hoc è dictis consectarium *Theorema*:

Fiat $\sqrt{3Rq} . \sqrt{Iq - Rq} :: CB.CQ$; ductâque QN ad CB perpendicularis circumferentiæ occurrat ad N; radii verò MN ad CB paralleli refractus sit NK, circuli peripheriæ denuò occurrens in Z; dico punctum Z esse imaginem, qualem mox definivimus, oculo conspicuam in ipsa NK sito. Fig. 126.

Nam (ductis CE ad MN, & CG ad NZ perpendicularibus, ac junctâ CN) ob $3Rq.Iq - Rq :: CNq.NEq$. hoc est $3CGq.CEq - CGq :: CNq.NEq$; erit dividendo $4CGq$

—CEq . CEq — CGq :: CNq — NEq . NEq :: CEq . NEq. quare permutando 4 CGq — CEq . CEq :: CEq — CGq. NEq. (hoc est) :: NGq — NEq . NEq. ergò componendo 4 CGq . CEq :: NGq . NEq. & ideò 2 CG . CE :: NG. NE. quare 2 . 1 + CG . CE = NG . NE. vel 2 . 1 = NG. NE + CE . CG. hoc est NZ . GZ = NG . NE + CE . CG. unde liquet, è mox antedictis, propositum.

XII. Ex ista porrò constructione facilè colligitur, si fuerit 3 Rq = Iq — Rq (hoc est si 2 R = I) adeóque CQ = CB; quòd hujusmodi punctum Z non aliud erit ab ipso D; seu perpendiculari ipsi AB debitam imaginem ad punctum D consistere; eas verò quæ reliquis refractis conveniunt ejusmodi imagines intra circulum omnes, vel supra peripheriam extare. quinetiam si fuerit 2 R ⊐ I, adeoque CB ⊐ CQ, patet nullius refracti imaginem in peripheria existere, sed omnes supra ipsam. Enim verò in his casibus omnes refracti axem AD supra punctum D intersecant. verùm si fuerit 2 R ⊏ I (utique sicut reverà quoad plerasque cunctas in hac rerum natura pellucidas refringentes materias usu venit) utì reipsâ datur ejusmodi punctum Z, in perepheria TD alicubi situm, ità facilè poterit isto modo determinari.

XIII. Observetur porrò sic definitum punctum Z circuli partem à D versus T per radios quadranti BT incidentes illustratam terminare. Omnes enim ipso MN obliquiùs incidentium refracti ipsam NZ supra Z versus G decussabunt; adeóque ad partes ZD circulo impingent; item omnium ipso MN rectiorum refracti ipsam NZ infra Z versus K intersecabunt; & hinc etiam in arcum ZD cadent.

Fig. 127. XIV. Exhinc apparet (id quod *ab eximio D. Slusio* monitum amicus mihi communicavit) potuisse *Cartesium* sine tabularum confectione suum *Iridis* angulum determinare. nam assumpto arcu DY = DZ; angulum istum arcus ZY metitur, posito circulum propositum per aquei globi centrum transire. quod ità facilè constat. Radii cujusvis diametro BC paralleli MN refractus NZK reflectatur in ZFH; & ZF in FO refringatur; sitque FL ad BD parallela; sumatur etiam DY = DZ; & connectantur CZ, CY; dico angulum LFO æquari angulo ZCY. Nam imprimìs ob ZN, ZF æqualiter ad peripheriam inclinatos, patet angulum OFH angulo PNZ vel CKZ æquari. igitur ang. HFL — HFO = ang FIC — CKZ = ang

KIZ

KIZ — CKZ = ang NZI — 2 ang CKZ = 2 ang NZC — 2 ang CKZ = 2 ang. ZCD = ZCY. est igitur ang. OFL = ang ZCY. Cùm itaque sit in superiore Hypothesi punctum Z umbræ lucisque confinium, manifestè liquet propositum.

XV. Subnotetur autem, si medium inflectens sit aqueum, arcum ZY esse partem circuli totam (posticam scilicet) illuminatam; tangentis enim ST refractus, puta TV; nedum non punctum Y prætergreditur, at citra punctum D cadit. ast in densioribus mediis, velut in vitro, secùs accidere potest; siquidem in eo tangentis refractus, puta TX, ultra terminum Y (modo prædicto designatum) cadit, ut quidem ex calculo facilè colligatur; unde pars illuminata arcu ZY amplior evadit; tangentium quippe refractis circumscripta. Viderit igitur excellentissimus vir; an universim constet (id quod ipse nisi fallor innuere videbatur) ex observata partis illuminatæ quantitate, *Iridis angulum, etiam juxta Cartesianas Hypotheses, rectè determinari.* Nam sumendo arcum DR = DX; ad punctum quidem R pertinget illustratio; neque tamen ulla lux quadranti BT incidens à parte ZR (sed illa tantùm quæ ad partes ZD cadit) ad oculum O inflectetur. unde quoad oculos ad has partes sitos, hoc est quoad rem quæ præ manibus, punctum Z lucem & umbram dirimit atque disterminat. Fig. 128.

XVI. Vobis autem expendendum propono, annon exhinc *apparentiarum in Iride ratio* elici possit, illâ fortè verisimilior, quam ipse *Cartesius* assignavit. quid enim si dixerò peripheriæ ZV impingentem lucem, & versus O inflexam magìs apparere; primò, quia spissior est, ac à radiorum geminâ diffusione constat, ab utraque puncti N parte in arcum ZV refractorum; tum secundò, quoniam obliquius ipsi ZV incidit, adeòque facilius & copiosiùs indè quàm aliunde versus partes O retorquetur? Et cum præsertim circa punctum Z acutiùs radii coëant, neque non incurrant obliquius; quidni proptereà vividior exindè resultet apparentia? Verùm hæc παρεκβατικῶς. Fig. 128.

Quoniam Colorum incidit mentio, quid si de illis (etsi præter morem ac ordinem) paucula divinavero?

XVII. *Album* est quod lucem copiosam, pariter ubique spissam, circumfundit. Talia fermè sunt corpora, rarioribus poris interpuncta; præsertim, quæ multas superficieculas, in omne latus obversas, habent. Suadetur hoc, Quia purè lucida semper alba videntur;

Quia

Quia corpus bene tersum luci Splendidæ expositum albescit; Quoniam alba difficiliùs ignem concipiunt; Quòd humore tenuiore vacuata corpora (*Capilli*, *Folia*, *Cineres*) *canitiem* acquirunt; Quibus & frigore constricta accenseri possent.

Nigrum est, quod lucem minimè, vel parcissimè refundit. talia plerunque sunt corpora valdè pellucida; nec non quæ crebros meatus, & cavernulas lucem absorbentes habent. Hoc indicat, Quod omnes *Umbræ nigræ apparent*; Quod *Aqua*, *Vitrum*, *Nubes* ad hunc colorem vergunt; Quod *nigra* faciliùs ignem imbibunt, calefiunt, comburuntur; Quòd longiùs dissita (quorum sensim intercipitur, & amittitur lux) obscuriora videntur.

e Lat. Fig. 128. *Rubrum est*, quod lucem effundit hinc indè confertam, ac solito magis constipatam, ast interstitiis umbrosis diremptam, & interruptam. talia concipi possunt corpora, multas intra se quasi *fornaculas* & *focos* habentia (qualia X, è *Speculis cavis* contextum; & Y è *Sphærulis*, transmissam lucem ad totidem *focos* cogentibus, constans). Argumento sit, Quod à *Speculis*, & *vitris ustoriis* collecta lux rubescit; Quòd corpora densa ignita (quippe quorum cellæ luce spissâ referciuntur) rubra videntur; Quòd roscida nubes Soli (matutino, vel vespertino) exposita rubet; Quòd erosio rubiginem parit. || Ad rubri naturam fortasse pertinet, quòd compressa lux languidiùs emicat.

Cæruleum est quod lucem raram, aut impetu segniore concitatam emittit. talia Videntur esse corpora, quæ particulis constant albis ac atris alternatim dispositis; sed & hunc subinde colorem ostentant candida maligniùs illustrata. Exemplo sint, *Æther Sudus* (in quo nempe pauciora natant corpuscula lucem ad oculos reverberantia, cæterâ luce dilabente) *Mare*, sale candido nimirum & humore pellucido constans; Umbra corporis cujusvis opaci, de die, ad lucernam ardentem facta, & ad chartam albam excepta seu terminata; (nempe corporis AB ad chartam XY violacea depingitur umbra, à lucerna C).

è Lat. Fig. 128. *Viride* cæruleo perquàm agnatum est. *Discrimen* explorent sagaciores; ego non ausim ariolari.

Cæterum reliqua colorata ex istis variè commixtis, atque contemperatis emergunt; ut *flavum* ex albo copioso, rubrique nonnihillo interspersò; *purpureum* ex multo cæruleo, rubrique tantillo, &c. Verùm sufficiat hâctenus, ista supra captum nostrum posita Scrutantes, nos illis, qui αἰτιολογίας *Physicas* morosiùs excipiunt, deridendos propinasse.

Sufficient hæc pro radiis parallelis; ad divergentes ordine procedendum est; ast interpositâ morâ, nè vix exorsi cogamur abrumpere. ||

Lect.

LECT. XIII.

I. *Transactis iis quæ refractioni conveniunt isti, quam ad circuli peripheriam subeunt radii sibimet paralleli; quid iis obvenit proximè dispiciendum venit, qui à puncto quopiam sensibiliter divergentes itidem circulo se objiciunt refringendos.* cum autem in hac Hypothesi multa reperiatur casuum varietas è pluribus causis orienda (nedum enim à mediorum specie differentium ordine, vel situ versus se diverso; quinetiam circuli refringentis alia ac alia, convexa nempe vel concava, facie radiationi obversa; sed ab ipsius quoque radiantis magis aut minus à refringente semoti positione conclusionum emergit nonnulla discrepantia) nobis incumbet ita rem, quâ possumus, moderari, simul ut cùm ex abstractione nimia proveniens confusio, tum è repetitione fastidium aliquousque devitentur. id autem non alias, opinor, commodiùs assequemur quam imprimis generalia quædam attingendo, cuidam uni casui (illi nempe, ubi $I \sqsubset R$, & radii convexis circuli partibus incidunt). Sic applicata, ut satis facilè possint ad alios quoque transferri; tum peculiaria nonnulla singulis congruentia subnotando, ad rem.

II. In circulum refringentem BN (cujus centrum C) radiet punctum A; & connexa AC protendatur ad utrasque partes indefinitè; tum cujusvis incidentis AN sit refractus NK, cum axe nimirum in K conveniens; dico compositas rationes AC ad CK, & NK ad NA æquari rationi I ad R. Conjungatur enim CN, & ducatur KH ad CN parallela; erit igitur (ut generatim antehac habetur ostensum) $I . R :: NK . NH = NK . NA + NA . NH = NK . NA + AC . CK$: Q. E. D. Fig. 129. 3 *Lect. num. 9.*

III. Hinc si fuerit $CA . CR :: I . R$. erit $CK . CR :: NK . NA$.

Nam

Nam erit tum CA . CR = CA . CK + NK . NA; unde, communem utrinque adjiciendo rationem CK ad CA, erit CK . CA + CA . CR = CA . CK + CK . CA + NK . NA. hoc est CK . CR :: NK . NA.

Fig. 130, 131. Notetur in figuris sequentibus esse perpetuo CA . CR :: I . R: quod semel, brevitatis causâ, monitum esto.

IV. Hinc consectatur; primò; Si fuerit AN $\sqsubset$ CR, quòd refractus N*α* cum axe AC prorsùm excurrens conveniet. Nam erit
Fig. 129. CK . AN $\sqsupset$ CK . CR :: NK . AN. adeóque CK $\sqsupset$ NK.

Fig. 130. V. Secundò, si fuerit AN = CR, refractus N*α* ad AC parallelus erit.

Nam sit NH ad AC parallela. quum itaque sit CA . AN :: (CA . CR ::) I . R; erit AN ipsius HN refractus. ergò vicissim NH ipsius AN.

Fig. 131. VI. Tertiò, Si fuerit AN $\sqsupset$ CR, refractus N*α* cum AC retrò conveniet extractus.

Erit enim tunc CK . AN $\sqsubset$ CK . CR :: NK . AN. ac indè CK $\sqsubset$ NK.

VII. Hinc clarum est, Si fuerit AB non minor quàm CR, omnes refractos versus AC procurrentes convergere. erit enim tunc semper AN $\sqsubset$ CR.

VIII. Subnotetur autem si fuerit saltem AB = CR, axi propiores radios in sensibilem parallelismum refringi.

IX. Item, Si AT circulum tangat, & fuerit AT $\sqsupset$ CR; manifestum est omnes refractos retrò protractos cum AC concurrere. tunc enim semper est AN $\sqsupset$ CR.

X. Clarum est quoque, si AN = CR, omnes arcui BN incidentium refractos retrò productos, omnes autem arcui NT incidentium refractos antrorsum procurrentes axi occurrere.

XI. Quum autem in casu, propositi maximè contrario (quum nempe I $\sqsupset$ R; & radii concavis incidunt partibus) adsimilis contingat diversitas, hanc quoque breviter attingemus.

1. Si

1. Si fuerit AN $\sqsubset$ CR, refractus Nα cum AC retrò tractus Fig. 132.
conveniet.

Nam CK $\sqsupset$ NK. (ut in priore casu).

2. Etiam hîc si AN = CR, refractus Nα fit ipsi AC parallelus.

Nam erit CK = NK. quod in hoc casu nisi K infinitè distet contingere nequit.

3. Si AN $\sqsupset$ CR; refractus Nα prorsùm excurrens axi occurrit.

Nam hîc CK $\sqsubset$ NK.

4. Si AB $\sqsupset$ CR; omnes refracti directè progredientes ad AC Fig. 133.
convergunt. Erit enim quivis incidens AN $\sqsupset$ CR.

5. Quum AN = CR, evidens est omnes arcui BN incidentes retrorsum versus CA refractos convergere; omnes autem ad partes NT cadentes antrorsum versus CB refringi.

XII. Hinc apparet sub istis duobus generalibus casibus tres à diverso Fig. 134,
puncti radiantis intervallo subnascentes speciales casus comprehendi; 135, 136.
nempe vel omnes ab axe post refractionem progredientes divergunt, vel omnes ad ipsum convergunt, vel aliqui divergunt, alii convergunt, his intercedente medio quodam ad illum parallelo. quæ subnotâsse discrimina videbatur operæ pretium ac determinâsse. Subdimus etiam quoad reliquos generales casus simpliciùs sese rem habere; scilicet eodem semper modo: Omnes enim ad cavum densius incidentium refracti directè procedentes ab axe divergunt; Ut & omnes eorum, qui convexo ratiori impungunt; id quod è generalissimis refractionum legibus immediatè sequitur, & è simplice secundum illas linearum ductu dilucescit. His admonitis in orbitam regressi pergimus.

XIII. E præmisso Theoremate non dificilè conficitur hoc *Problema*: Dato in axe puncto K, refractum designare, qui per hoc ipsum transeat. ||

Hoc nempe pacto. Reperiatur punctum G, ut sit KG. AG :: *Lect. 10.*
CK. CR. item fiat GF. FA :: CK. CR (:: KG. AG). tum *Num. 25.*
centro F, intervallo FG describatur circulus refringentem intersecans Fig. 137.
ad N; erit connexa NK incidentis AN refractus.

Nam ducatur FN; & ob KG. AG :: GF. FA. erit permutatim KG. GF :: AG. FA. dividendóque KF. GF :: GF. FA. hoc est KF. FN :: FN. FA. quare triangula KFN, NFA

assimilantur. unde N K . K F :: A N . N F . seu permutando N K .
Fig. 137. A N :: K F . N F . erat autem priùs K F . N F :: G F . F A :: C K .
C R . est igitur N K . A N :: C K . C R . unde (juxta dictum Theorema) constat factum.

XIV. Ad constructionem istam advertentes animum, hujusmodi facilè *Consectaria* deducetis:

1. Si circulus G N H *refringentem* contingat ad H; ipsius A H (perpendicularis utique) refractus in K terminabitur; & aliorum incidentium refracti ad unas ipsius K partes (ultra nempe vel citra K respectu centri, pro diversitate casuum ab ipsius A positione resultantium) cadent.

2. Si dictus ille circulus *refringenti* non occurrat omninò, *Problema* constructionem respuet; nec ullus refractus punctum K permeabit.

3. Si circulus G N H *refringenti* coïncidat (id quod facilè concipi potest, & in aliquo reverà casu contingit) omnes refracti in punctum K confluent. || Hæc & alia constructionem istam consectantur solerter expansem; quorum saltem nonnulla haud abs re fuerit exertiùs ostendi, velut hoc imprimìs palmarium.

XV. Si fuerit A B . C R :: B Z . C Z; dico punctum Z esse limitem, ultra vel citra quem nullus refractus axim intersecat; seu perpendicularis ipsius A B refractum in Z terminari.

Nam cujusvis incidentis A N refractus axi occurrat in K, erit ideò C K . C R :: N K . N A . ergò quum sit C R . C Z :: A B . B Z; erit C K . C R + C R . C Z = N K . N A + A B . B Z.

Fig. 138. 1. Est autem (in prima figura, ubi puncta Z, & K sunt ad partes centri, vel ubi refracti ad axem directè procurrentes convergunt) B K $\sqsubset$ N K, & A B $\sqsupset$ A N; adeóque B K . A B $\sqsubset$ N K . N A. ergò C K . C R + C R . C Z $\sqsupset$ B K . A B + A B . B Z. hoc est C K . C Z $\sqsupset$ B K . B Z. vel inversè permutando B K . C K $\sqsubset$ B Z . C Z. dividendóque B C . C K $\sqsubset$ B C . C Z. ergò C K $\sqsupset$ C Z; adeóque punctum K supra Z existit, versus centrum; quod erat propositum ostendere.

Fig. 139. 2. In secundâ verò figura (ubi puncta Z, K ad alteras supra punctum A partes à centro aversas cadunt) connectatur subtensa B N, & ducatur A S ad K N parallela; hæc secabit angulum B A N, majorem ipso B K N, vel B A S; & cùm angulus A B N sit obtusus, erit A N $\sqsubset$ A S. adeóque K N . A N $\sqsupset$ K N . A S :: K B . A B. erit etiam hîc igitur (ut supra) C K . C Z $\sqsupset$ B K . B Z. vel permutatim C K . B K

$\sqsupset$

$\sqsupset$ CZ. BZ. dividendóque CB. BK $\sqsupset$ CB. BZ. adeóque BK $\sqsubset$ BZ; hoc est punctum K magis quàm Z à centro elongatur.

3. Haud dissimilis in aliis casibus erit *Demonstratio*; ut in hoc, ubi I $\sqsupset$ R, ad convexas; est enim hic (ut in præcedente) KB. AB $\sqsupset$ KN. AN. adeóque (supra monstratis insistendo) CK. CZ $\sqsubset$ KB. BZ. vel permutando CK. KB $\sqsubset$ CZ. BZ. dividendóque CB. KB $\sqsubset$ CB. BZ. unde KB $\sqsupset$ BZ. adeóque punctum K centro semper vicinius est quàm Z. Fig. 140.

XVI. Hæc autem cùm, modo suo mutatis mutandis, ad omnes casus transferri possint, habentur indè determinati refractorum limites, hoc est apparentia radiantium punctorum A loca, respectu oculi centrum habentis in axe AC situm; juxta doctrinam à nobis toties inculcatam.

XVII. Id autem hic in duobus casibus (utroque nimirum ad circuli cavas) peculiare venit observandum cùm sit CB = CR, omnes refractos in ipso puncto Z (ut suprà definito) retrò protractos congregari. Nam ob AB. BC :: AB. CR :: BZ. CZ. erit dividendo AC. BC :: BC. CZ. quapropter ad punctum quodvis N adsumptum connexis AN, ZN, erit ZN. AN :: (CZ. CN ::) CZ. CR. unde ZN refractus erit incidentis AN.

XVIII. Hinc etiam si fuerit AB = CR, consequetur punctum Z à centro infinitè distare; quia nempe tum ob AB. CR :: BZ. CZ, erit BZ = CZ; id quod fieri nequit, nisi punctum Z ita elongetur infinitè. Fig. 141.

XIX. *Consectantur* & hæc: Si punctorum radiantium A, α limites sint puncta Z, ζ, erit AC. AB + BZ. CZ = αC. αB + Bζ. Cζ. Fig. 142, 143.

Nam è præmissis facilè constat esse

$$\left.\begin{array}{l}\text{tam } AC.AB + BZ.CZ = \\ \text{quam } \alpha C.\alpha B + B\zeta.C\zeta = \end{array}\right\} I.R.$$

XX. Unde Cζ $\sqsubset$ CZ. Nam ob BC. AB $\sqsupset$ BC. αB. componendóque AC. AB $\sqsupset$ αC. αB. erit BZ. CZ $\sqsubset$ Bζ. Cζ. dividendóque BC. CZ $\sqsubset$ BC. Cζ. adeóque Cζ $\sqsubset$ CZ.

Fig. 144. XXI. Imò universim si radii quivis A F, $\alpha\phi$ ad circulum refringentem æqualiter inclinentur, hísque conveniant refracti F L, $\phi\lambda$, erit C $\lambda \sqsubset$ C L. id quod hoc modo non inelegantèr ostenditur. Ducatur recta B X cum B C angulum efficiens parem angulo refracto ad positam inclinationem pertinenti; pérque puncta F, ϕ; & centrum C transeuntes rectæ ipsi B X occurant punctis P, ϖ. tum quoniam triangula F C L, B C P æquiangula sunt (angulus enim C B P angulo C F L ex constructione par est, & ang. B C P verticali suo F C L æquatur) nec non latus C B lateri C F æquatur, erit C P = C L. Similì planè discursu est C ϖ = C λ. Porrò, quia C ϕ ad C α (hoc est Sinus anguli C $\alpha\phi$ ad Sinum anguli C $\phi\alpha$) majorem rationem habet, quàm C F ad C A (hoc est quam Sinus anguli C A F ad Sinum anguli A F C, vel æqualis anguli C $\phi\alpha$) liquet angulum C $\alpha\phi$ majorem esse angulo C A F, adeóque reliquum α C ϕ minorem esse reliquo A C F; vel angulum P C B angulo ϖ C B. unde liquet esse C ϖ majorem quàm C P; hoc est C λ majorem esse quàm C L: Quod E. D.

Coroll. Vides arcum B F majorem esse arcu B ϕ.

Notes etiam omnes ejusdem inclinationis refractos ope ductæ rectæ B X promptissimè designari. sed hæc an πάρεργα fuerint nescio.

Fig. 145. XXII. *Subjiciam & hoc Theorema:* Convexo densiori incidentium radiorum A M, A N (quorum A N sit obliquior) refracti M K, N L axem ad easdem partes, directè pergentes, secent, iste ad K, hic ad L; dico fore C K majorem quàm C L.

Nam connexis C N, K N; & ductâ L H ad K N parallelâ; quoniam, è præmissis, est C K . C R :: M K . M A . & C R . C L :: N A . N L . erit C K . C K + C R . C L = M K . M A + N A . N L . est autem N K . N A $\sqsupset$ M K . M A (quia N K $\sqsupset$ M K, & N A $\sqsubset$ M A) ergo C K . C R + C R . C L $\sqsubset$ N K . N A + N A . N L . hoc est C K . C L $\sqsubset$ N K . N L . hoc est N K . H L . $\sqsubset$ N K . N L . quapropter est L H $\sqsupset$ N L . est autem angulus L C N obtusus; ergò recta L H angulum C L N secat; ac angulus L H C interno L N C major est; hoc est angulus K N C angulo L N C major est. unde liquidò patet fore C K $\sqsubset$ C L.

Coroll. C K . C L = M K . M A + N A . N L.

XXIII. Hinc, ejusmodi omnes refracti seipsos priùs quàm axem intersecant, velut ad X. || Hoc speciminis loco pro casu, qui præ manibus.

manibus. propter alios qui similia volet, ipse viderit, & sibi paraverit. ego jam aliò progredior; eò scilicet, ut locum definiam imaginis in dato quovis refracto apparentis; prætervehemur enim illud in his certè casibus *intricatissimum Problema* (cujúsque Solutio nullatenus aut laborem quem exigit, aut temporis jacturam compensabit) quo jubetur per datum punctum transeuntem refractum designare. positione datum igitur refractum accipimus; & in hoc imaginis locum ex hoc uno Theoremate determinamus.

XXIV. Duorum incidentium ANP, ARS sibi quàm proximorum concipiantur refracti Nϖ, Rσ sese puncto Z decussantes; bisecentúrque subtensæ NP, Nϖ punctis E, G; (a rectis nempe CE, CG ad illas perpendicularibus) dico rationem NZ ad GZ è rationibus CE ad CG (hoc est I.R), NG ad NE, ac AN ad AE componi. Fig. 146.

Ducantur enim CK ad RS, & CI ad Rσ perpendiculares; inque productis CE, CG capiantur CF = CK; & CH = CI; & per F ducatur TV ad NP parallela; & per H etiam XY ad Nϖ parallela. Jam est AP. AN :: arc PS. arc NR (ob sumptam arcuum indefinitam parvitatem). ergò $\frac{AP \pm: AN}{2}$. AN :: $\frac{\text{arc } PS \pm: \text{arc. } NR}{2}$. arc NR. hoc est AE. AN :: arc NT. arc NR. item est NZ. Zϖ :: arc NR. arc ϖσ. ac indè NZ. $\frac{NZ \pm: Z\varpi}{2}$ :: arc NR. $\frac{\text{arc } NR \mp: \varpi\sigma}{2}$. *hoc est NZ. ZG :: arc NR. arc NX. ergò, rationes æquales adjungendo, est AE. AN + NZ. ZG = arc NT. arc NR + arc NR. arc NX = arc NT. arc NX. quoniam autem est CE. CG :: (I.R :: CK. CI ::) CF. CH. vel permutando CE. CF :: CG. CH; erit, *juxta præmonstrata, arc NT. arc NX = NG. NE + CE. CG. quapropter erit AE. AN + NZ. ZG = NG. NE + CE. CG. unde (rationes hinc indè pares subducendo) erit NZ. ZG :: + CE. CG + NG. NE + AN. AE. Quod propositum fuit ostendere.

* Lect. 9. Num. 11.

* 12 Lect. Num. 6.

XXV. Hinc, si fiat CE. CG :: NE. L; & AN. AE :: L. M; erit NZ. ZG :: NG. M. Nam NG. NE + CE. CG + AN. AE = NG. NE + NE. L. + L. M = NG. M.

unde.

unde Problematis constructio, seu puncti Z determinatio habetur.

Fig. 147. XXVI. Subnectam & ab amico communicatam (aliâ methodo repertam ab ipso, concinneque demonstratam) constructionem: Duc N R incidenti A N perpendicularem, & secantem axin in R. Fac N P . N ☛ :: N R . T. duc N Q refracto N K perpendicularem, & æqualem ipsi T; denique jungatur Q C; hæc producta secabit N K in foco quæsito Z.

XXVII. Hujusmodi verò punctum Z esse locum ipsissimum imaginis puncti A, oculo apparentis in ipsa N ☛ constituto, sæpius expositæ rationes manifestant.

* In Num. 25. XXVIII. Attendenti porrò constabit, siquidem fuerit *N G ad M ratio æqualitatis, quòd punctum Z infinito à puncto G, vel N intervallo distabit; seu proximi radio N ☛ refracti ipsi N ☛ paralleli erunt; sin ratio N G ad M sit majoris inæqualitatis, quòd punctum Z existet infra G, vel in N G antrorsum protracta; verùm denuò si N G ⊐ M, quod punctum Z supra N, vel in N G retrò tractâ versatur. Hæc sufficerit innuisse. Hinc etiam posticæ circuli partis illuminatæ quantitas utcunque possit determinari. sed ad locum Solidum res spectat, ipsámque proinde missam facio.

Fig. 148. XXIX. Inferemus autem hîc *Phænomeni* cujusdam satis obvii, quódque nonnullis forsan *(utpote communibus Opticæ decretis apparenter adversum)* mirabile videatur, explicationem. Sit lucidi puncti A (modicè distantis, & vividè radios ejaculantis) ad arcum circularem M B N (ab axe A B bisectum) imago, seu focus Z; & per Z, ad ipsam A Z perpendicularis traducta concipiatur linea X Y. porrò, desumatur aliud punctum remotius E; liquet ejus imaginem citra punctum Z (centrum versus) jacere; ductis itaque rectis E M, E N, harum refracti adhuc altiùs se intersecant, puta ad K; productæque M K, N K lineam X Y secent punctis O, P. quinetiam ulterius accipiatur punctum F; ductarúmque rectarum F M, F N refracti sint M L, N L; lineæ X Y occurrentes ad puncta R, S; quibus peractis manifestum est intervallum R S ipso O P majus esse. Hinc facilis habetur ratio, cur punctum lucidum (velut *ardens lucerna*, vel *Imago Solis* ad *Speculum* aut *lentem diaphanam* effecta, (quin & stellæ fixæ) quæ propter exiguitatem suam apparentem punctorum ad instar haberi possunt) quò a distinctæ visionis loco longiùs amovetur, eò (contra quam in aliis visibi-

visibilibus obvenit) majus apparet. Nam si arcus M N B oculi superficiem repræsentet, *(pupilli amplitudini respondentem)* linea X Y fundum oculi, A locum distinctæ visionis; ejusmodi lucens ad A positum satis angustum circa Z spatium illustrabit; ad E verò constitutum, validè radios vibrans, totum coruscatione suâ spatium O P afficiet; ad F denique collocatum adhuc majus intervallum R S percellet, indéque grandiorem sui speciem exhibebit. In placidè verò lucem remittentibus aliter se habet, quoniam pauciores, & languidiùs agentes qui extremis O, P vel R, S allabuntur radii nullam sui perceptionem excitant. Fig. 148.

Eo lubentius hanc, adeò perspicuam, hujusmodi *Phænomenωr* assignamus rationem, quoniam in eorum reddendis causis itá titubat magnus ille *Galilæus*, nescio quos, ex refractionibus, reflectionibúsve quibusdam commentitiis oriundos, ascititios suggerens cincinnos. ||

XXX. Quin hic tandem *Dioptricam simplicem circularem claudemus*, quam utcunque quàm paucissimis itá complexi sumus, ut præcipua saltem (quæ videbantur) & notatu digniora perstrinxerimus. priùs autem *Catoptricam circularem*; nec non utramque, tam *Dioptricam* quàm *Catoptricam*, planam, quantum instituto nostro visum est congruere, pertractavimus. quibus perfuncto mihi propositum aliquando fuit ad curvas alias, conicas præsertim sectiones, haud dissimili methodo pertentandas cogitationem extendere. Sed enim, cùm in his tricis *Geometricis* etiamnum satis supérque commoratus sim; & præter ea quæ circa conicas sectiones à nobis pridem insinuata sunt (quæ & ab aliis luculentè tractata prostant) reliqua non itá magnum usum spondeant; contentus hasce primarias, in usu maximè positas, & usui præsertim accommodatas superficies, ultra paullò quàm hactenùs attentatum aut peractum scirem, excussisse; cæteras omninò missas faciam.

XXXI. Porrò, quoad inflectiones istas, quos pluribus successivè planis, aut Sphæricis Superficiebus, utcunque constitutis aut compositis, incidentes subeunt radii; quæ conveniunt illis Symptomata, possunt ea de præmissis elici; quorum certè præcipuum est, quod apparentis puncti locum respicit ab inflectionibus ad istas superficies factis resultantem; in hoc enim indagando, determinandóque potissimùm hæ disquisitiones versantur; Hunc igitur saltem definitum exhibebimus, idque satis commodè, ex uno quodam Theoremate, seu regula generali; cui exempla quædam, communis usûs in gratiam selecta, eorúmque qui in hæc inciderit minuendo labori præsertim comparata, subjungemus. Ista verò, nè jam tædio Sinus, sequenti reservamus.

LECT. XIV.

I. *Sub praecedentis calcem, Regulam pollicebamur, exemplis stipatam, ex qua punctorum è variis inflectionibus resultantes, imagines dignoscantur. illam nunc exhibemus quàm simplicime conceptam.*

Fig. 149, 150. Sit A B E F O radius principalis, puncti radiantis A speciem per oculi centrum O deferens, ex incidente primo A B, & inflexis B E, E F, F O (in directum aut secùs dispositis) constans; tum puncti A respectu oculi in recta B E positi, & ex inflectione ad superficiem B resultans (è praemissis utique designabilis) imago sit Z. item hujus Z (quod jam veluti radians concipiatur) respectu oculi in recta E F constituti, & ab inflectione ad superficiem E emergens imago sit Y; demùm puncti Y (tanquam in superficiem F radiantis) respectu oculi in F O collocati sit imago X. erit hoc punctum X imago cunctis ab his inflectionibus proveniens. neque secùs quotcunque fuerint inflectiones sese res habebit; enimverò semper ex illa tali postrema inflectione resultans imago, eadem erit cum illa, quam omnes exhibent.

Hujus effati veritas è constructione satis apparet; è qua facilè colligitur proximorum ipsi A B incidentium hinc indè radiorum inflexos tandem circa punctum X ipsum F X intersecare. vel ità rem collegeris: punctum Z est puncti A imago; & punctum Y ipsius Z; denuóque punctum X ipsius Y; itaque punctum X ipsius A imago erit, qualem nempe res hic fert, remota. Strictiore longiusculo discursu posset hoc comprobari, sed quorsum rem satis claram intricare?

II. Exempla jam, quae dixi, seu è praemissis deducta consectaria subnectam. Notetur autem imagines, quae in iis proponuntur designandae, oculum respicere Centrum habentem in ipso radiationis axe (qualis est recta B D) constitutum. item diversarum superficierum ac radiationum axes sibimet in directum poni. praesumatur etiam in refractionibus ex aëre factis ad vitrum fore I. R :: 5 . 3; ad aquam verò fore I. R :: 4 . 3. (hae nempe rationes veris probè congruae depre-

deprehenduntur) : addo, confusionis evitandæ causâ symbolum I dehinc in his exemplis perpetuò majorem proportionis refractiones dimetientis terminum denotare, quocunque de medio in quodcunque peragatur refractio. porrò, medium primum infringens perpetuò densius intelligatur rariori circundatum. item, in figuris appositis litera C denotat centrum anterioris circuli, K centrum posterioris; & B verticem anterioris, D verticem posterioris; denuò designat Y locum imaginis quæsitam.

Hisce præmonitis, primum de longinquo radiantium, seu parallelos ejicientium radios punctorum imagines, pro lentium varietate, sic determinantur.

I. *Ad lentem plano-convexam.* Fig. 151.

II. *Ad lentem plano-concavam.*

Fiat $I - R . R :: DK . DY$.
In Vitro est $DY = \frac{1}{2} KD$.
In Aqua est $DY = 3 KD$.

III. *Ad lentem convexo-planam.* Fig. 151, 152.

IV. *Ad lentem concavo-planam.*

Fiat $\begin{cases} I - R . I :: BC . BZ; \ \& \\ I . R :: DZ . DY. \end{cases}$
In Vitro $DY = \frac{1}{2} BC - \frac{1}{3} BD$.
In Aqua $DY = 3 BC - \frac{1}{4} BD$.

V. *Ad lentem convexo convexam.* Fig. 152.

VI. *Ad lentem concavo-concavam.*

Fiat $\begin{cases} I - R . I :: BC . BZ; \ \& \\ \frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY. \end{cases}$

Coroll. *Ad integram Sphæram.*
Fiat $2I - 2R . I :: CD . CY$.

VII. *Ad lentem convexo-concavam.* Fig. 152, 153.

VIII. *Ad lentem concavo convexam.*

Fiat $I - R . I :: BC . BZ$. &

Fig. 152, 153. 1. Si punctum Z cadat inter C, & K, fac $DZ + \frac{I}{R}KZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY ad partes lentis versus K.

2. Si punctum Z cadat extra CK; & sit insuper $DZ \sqsubset \frac{I}{R}KZ$; fac $DZ - \frac{I}{R}KZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY ad partes lentis versus K.

3. Si $DZ = \frac{I}{R}KZ$, imago Y infinitè distabit.

4. Si $DZ \sqsupset \frac{I}{R}KZ$; fiat $\frac{I}{R}KZ - DZ . DZ :: DK . DY$, & cape DY ad partes lentis adversas ipsi K.

De sensibiliter autem propinqua distantia radiantium seu divergentes radios emittentium punctorum (qualia semper designat punctum A) imagines (ut & illæ quas ad ejusmodi puncta convergentes efficiunt radii) hoc pacto determinantur.

Fig. 154, 155. I. *Ad lentem plano-planam diverg.*

II. *Ad lentem plano-planam converg.*

Fiat $\left\{ \begin{array}{l} R . I :: AB . BZ, \text{ \&} \\ I . R :: DZ . DY. \end{array} \right.$

Brevius. Fiat $I . I - R :: BD . AY$.

Fig. 156. III. *Ad lentem plano-convexam diverg.*

IV. *Ad lentem plano concavam converg.*

Fiat $R . I :: AB . BZ$. & cum Z cadit

1. Extra DK, si $\frac{I}{R}KZ \sqsubset DZ$; fac $\frac{I}{R}KZ - DZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY ad partes lentis adversus A.

2. Si $\frac{I}{R}KZ = DZ$; imago distabit infinitè.

3. Si $\frac{I}{R}KZ \sqsupset DZ$; fac $DZ - \frac{I}{R}KZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY versus A.

4. Cum

4. Cùm Z cadit inter puncta D, K; fac $DZ + \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY versus A.

V. *Ad lentem plano-concavam diverg.* Fig. 156, 157.

VI. *Ad lentem plano convexam converg.*

Fiat $\begin{cases} R . I :: AB . BZ; \ \& \\ \frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY. \end{cases}$

VII. *Ad lentem convexo-planam diverg.* Fig. 157.

VIII. *Ad lentem concavo-planam converg.*

1. Si $AB \sqsubset \frac{R}{I} AC$, puncta Z, & Y ad lentis partes puncto A adversas reperientur, facto $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$. & $I . R :: DZ . DY$.

2. Si $AB = \frac{R}{I} AC$, imago infinitè distabit.

3. Si $AB \sqsupset \frac{R}{I} AC$; deprehendentur Z, & Y versus A, facto $\frac{R}{I} AC - AB . AB :: BC . BZ$; & $I . R :: DZ . DY$.

IX. *Ad lentem concavo-planam diverg.* Fig. 158.

X. *Ad lentem convexo-planam converg.*

Si A cadat extra B C, fac $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; sin A cadat inter B, & C, fac $AB + \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; tum fiat $I . R :: DZ . DY$.

Fig. 158, 159. XI. *Ad lentem convexo-convexam diverg.*

XII. *Ad lentem concavo-concavam converg.*

1. Si $AB \sqsubset \frac{R}{I} AC$, facto $AB - \frac{R}{I} AC \,.\, AB :: BC \,.\, BZ$; & $\frac{I}{R} KZ - DZ :: DK \,.\, DY$; puncta Z, Y adversus A cadunt.

2. Si $AB = \frac{R}{I} AC$, fac $I - R \,.\, R :: DK \,.\, DY$; & cape DY adversus A.

3. Si $AB \sqsupset \frac{R}{I} AC$; fac $\frac{R}{I} AC - AB \,.\, AB :: BC \,.\, BZ$; & sume BZ versus A'. Jam cùm Z cadit extra DK, si primò sit $\frac{I}{R} KZ \sqsubset DZ$, fac $\frac{I}{R} KZ - DZ \,.\, DZ :: DK \,.\, DY$; & sume DY adversus A.

4. Secundò, si $\frac{I}{R} KZ = DZ$, imago distabit infinitè.

5. Tertiò, si $\frac{I}{R} KZ \sqsupset DZ$, fac $DZ - \frac{I}{R} KZ \,.\, DZ :: DK \,.\, DY$; & sume DY versus A.

6. Quum denuò cadit Z inter D, & K; fiat $DZ + \frac{I}{R} KZ \,.\, DZ :: DK \,.\, DY$; sumatúrque DY versus A.

Corol. Ad integram Sphæram diverg.

1. Si $AB + AC \sqsubset \frac{2R}{I} AC$; fiat $AB + AC - \frac{2R}{I} AC \,.\, AC :: BC \,.\, CY$; & cape CY adversus A.

2. Si $AB + AC = \frac{2R}{I} AC$; imago in infinitum abit.

3. Si $AB + AC \sqsupset \frac{2R}{I} AC$; fiat $\frac{2R}{I} AC - AC - AB \,.\, AC :: BC \,.\, CY$; capiatúrque CY versus A.

Fig. 159. XIII. *Ad lentem concavo-concavam diverg.*

XIV. *Ad lentem convexo-convexam converg.*

Si

Si A cadat extra BC, fiat $AB - \frac{R}{I}AC . AB :: BC . BZ$; sin A cadat inter B, C; fiat $AB + \frac{R}{I}AC . AB :: BC . BZ$; deinde fac $\frac{I}{R}KZ - DZ . DZ :: DK . DY$. Fig. 159.

Coroll. Ad integram Sphæram converg.

Si punctum A extra BC ponatur, fiat $AB + \frac{I - 2R}{I}AC :: BC . CY$. sin A cadat inter B, & C; fiat $AB + \frac{2R - I}{I}AC . AC :: BC . CY$; & cape CY ad partes centri versus A.

XV. *Ad lentem convexo-concavam diverg.* Fig. 160, 161.

XVI. *Ad lentem concavo convexam converg.*

1. Si $AB \sqsupset \frac{R}{I}AC$; puncta Z, & Y versus A cadunt, facto $\frac{R}{I}AC - AB . AB :: BC . BZ$; & $\frac{I}{R}KZ - DZ . DZ :: DK . DY$.

2. Si $AB = \frac{R}{I}AC$; fac $I - R . R :: DK . DY$; & cape DY versus A.

3. Si $AB \sqsubset \frac{R}{I}AC$; fac $AB - \frac{R}{I}AC . AB :: BC . BZ$; & cape BZ adversus A. Jam quum Z cadit extra DK, tum primò si $\frac{I}{R}KZ \sqsubset DZ$, fac $\frac{I}{R}KZ - DZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY versus A.

4. Secundò, si $\frac{I}{R}KZ = DZ$, imago infinitè distabit.

5. Tertiò, si $\frac{I}{R}KZ \sqsupset DZ$, fac $DZ - \frac{I}{R}KZ . DZ :: DK . DY$, & sume DY adversus A.

6. Sed quando Z inter D, & K cadit; fiat $DZ + \frac{I}{R}KZ . DZ :: DK . DY$; & sumatur DY adversus A.

Fig. 160, 161, 162. XVII. *Ad lentem concavo convexam diverg.*

XVIII. *Ad lentem convexo-concavam converg.*

Si A cadat extra BC, fiat $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; sin A cadat inter B, & C; fiat $AB + \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$.

1. Jam cùm Z cadit extra DK, tum primò si $\frac{I}{R} KZ \sqsubset DZ$, fac $\frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY$, & cape DY adversus A.

2. Secundò, si $\frac{I}{R} KZ = DZ$; imagò infinitè elongabitur.

3. Tertiò, si $\frac{I}{R} KZ \sqsupset DZ$, fac $DZ - \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & sume DY versus A.

4. Sed quando Z inter D, & K cadit, fiat $DZ + \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & accipiatur DY versus A.

Hisce subnectam sequentia; non contemnendum in *Engyscopiis* usum præ se ferentia *Problemata.*

Fig. 163. I. *Dati puncti propinqui A perfectam imaginem per lentem concavo-convexam in aliud datum punctum Z lenti vicinius projicere.* (perfectam imaginem intelligo, quæ resultat ex omnibus, quos ipsum A diffundit, radiis in ipsa readunatis.)

Fiat $I - R . R :: AZ . ZB$. & dividatur ZB in C, ut sit $CB . CZ :: I . R$. tum centro C describatur circulus EBF. item centro Z intervallo quovis ZD (majori quam ZB) describatur circulus GDH; factum erit; nempe lens EFGH puncti A perfectam imaginem in punctum Z projiciet.

Nota, datâ CB punctâ A, Z è propositis facilè determinari.

In vitro, si $CB = 15$, erit $\left\{ \begin{array}{l} ZC = 9 \\ ZB = 24 \end{array} \right\}$ & $\left\{ \begin{array}{l} AZ = 16. \\ AB = 40. \end{array} \right.$

Adnotetur etiam per lentem EGHF ad Z tendentes radios ad A refringi.

Hujusmodi

Hujusmodi Vitrum Myopes juvat; pro quibus ità construatur: sit Z D distantia, ad quam optimè cernunt; sumatúrque Z B utcunque paullo minor quàm Z D; & fiat $CB = \frac{1}{2} ZB$; tum centro C per B describatur circulus E B F, & centro Z per D circulus G D H describatur; ipsi (Superficiei G D H oculum admoventes) punctum A distinctè spectabunt, velut ad Z situm.

Quòd si velit *Myops*, ad distantiam itidem Z D distinctè cernens, assignatum punctum A contemplari; adsumpto, ut priùs, liberè puncto B, fiat $CB = \frac{2\,AB \times ZB}{5\,AB - 3\,ZB}$; & reliqua fiant, ut priùs.

II. *Dati puncti A perfectam imaginem, etiam ope lentis concavo-convexæ, in datum aliud punctum Z longinquius projicere.* Fig. 164.

Fiat AZ. AD :: I — R. R. item dividatur AD in C, ut sit CD. CA :: I. R; & centro C per D describatur circulus E D F. item centro A, quopiam intervallo A B (minori quàm A D) describatur circulus E D F; factum erit; nempe lens E D F puncti A imaginem in punctum Z projiciet.

Datâ C B, puncta A, Z vicissim è propositis innotescunt.

In vitro, si $CB = 15$, erit $\left\{\begin{matrix} ZC = 9. \\ ZB = 24. \end{matrix}\right\}$ & $\left\{\begin{matrix} AZ = 16. \\ AB = 40. \end{matrix}\right.$

Itidem & hic, per lentem E F versus Z tendentes radii in A refringuntur.

Hinc *Presbytis* utile conficiatur *Vitrum*, hoc pacto: Ad intervallum Z D hi distinctè videant. Secetur Z D in A, ut sit $AD = \frac{1}{3} ZD$. item sit $CD = \frac{1}{4} AD$ (vel sit $CD = \frac{1}{3} ZD$) centróque C per D describatur circulus E D F. item utcunque sumpto puncto B (citra D nempe, versus A) centro A per B describatur circulus E B F. lente E F dicti *Presbytæ* punctum A distinctissimè conspicient. ||

Hisce demum in cumulum adjiciatur ab amico communicatus *Modus elegans ac expeditus cujuscunque casûs imaginem Geometricè designandi; ut & lentem describendi, quæ imaginem in datum punctum projiciet.*

1. *Imaginem designare.*

E centris, & verticibus circulorum lentem constituentium erigantur ad axin perpendiculares K j, B P, D Q, C I; deinde per punctum A ducatur quævis recta A P I secans B P, & C I in P, & I. fac C I. C R :: I. R. agatur recta R P secans D Q, & K ϱ in Q, & ϱ; fac K ϱ. K j :: R. I. & agatur j Q, quæ producta secabit axin in Y, loco imaginis quæsito. || Fig. 165, 166, 167.

2. *Re-*

Fig. 163. 2. *Reliquis datis, lentem deſcribere.*

Sumantur ad arbitrium B Y diſtantia lentis ab imagine, B D craſſities lentis, & alter circulorum lentem conſtituentium ut (in hoc exemplo) anterior E B F, cujus centrum ſit C; & ad iſta puncta B,D,C erigantur B P, D Q, C I ad axin perpendiculares. deinde per punctum A ducatur recta quævis A P I ſecans B P, & C I in P, & I. fiat C I. C R :: I. R; & agatur R P ſecans D Q in Q. fiat D Q. D S :: I. R; & agatur S Y ſecans R P productam in ρ; à quo demittatur perpendicularis ρ K; & centro K intervallo D K deſcribatur circulus E D F; erit E B F D lens quæſita.

Hic autem in nimium excreſcenti ſpatium Lectioni defigatur limes.

LECT. XV.

BEne longo circa lucis reflectiones, quatenus hæ viſum afficiunt, inſtituto ſtadio metam nunc opportune fixuri videmur, ea quomodocunque proſecuti, quæ περιεργαίτερα nobis viſa, nec adeò pervulgata ſe objecerant. quod autem magnitudines objectas attinet (quas utique de punctis tantum radiantibus agentes omnino videamur omiſiſſe) quales nimirum illæ ex hujuſmodi radiorum inflectionibus quoad ſitum, figuram, quantitatem mutationes ſubeunt, id fermè totum paſſim atque fuſiùs tractatum proſtat, nec animus eſt mihi toties actum agere, vel è trivio petita quæque huc transferre. quin & eò ſpectantia pleraque cuncta de jam definitis ac oſtenſis haud difficili negotio colligi poſſe videntur; ſingulorum nempe cujuſvis objecti punctorum (extremorum præſertim ac mediorum) apparentias indè determinando. verùm nec ea penitus neglectui habita, ad ſubſequentem quoque regulam (ſeu monitiunculam) preſſiùs animum advertentes forſan autumabitis. Si qualem aſſignata quævis ſuperficies inflectens (ſimplex aut compoſita) magnitudinis cujuſvis expoſitæ ſpeciem exhibet (ampliorem nempe vel contractiorem, directam aut inverſam, confuſam diſtinctámve, ſeu quovis alio modo demutatam) internoſcere cupiatis, id

id quadantenus hoc modo pertentantes attingetis. Oculi centrum (quale dari passim supponitur, ei saltem analogum quid dari videtur; nec indè, quoad illam quæ præ manibus rem, erroris quicquam proveniet) oculi centrum, inquam, ubicunque pro libitu constitutum ceu punctum radians concipiatur; tum ex eo duo prodeuntes radii ad propositam superficiem (eo quem hujus exigit natura vel proprietas specialis modo) inflectantur. tum inter hos inflexos collocatum intelligatur objectum; ejus certè species inter duos primos ab oculi centro procedentes radios consistet, quæ cum ipso (quoad apparentem anguli quantitatem, punctorum correspondentium positionem, & reliquas affectiones) objecto comparata voti compotes vos reddet; & id quidem perfectiùs, si extremorum ac mediorum præsertim objecti punctorum justas imagines, ex doctrina hactenus tradita, velitis investigare. ab appositis exemplis res manifestior evadet; in quibus notetur punctum O semper oculi centrum, rectam O B A radiationis axem (superficiebus inflectentibus perpendicularem, & objecta in partes æquales dirimentem) denotare.

Exemp. I. *Proponatur Superficies plana medii refringentis densioris (aquæ si placet, aut vitri) objectum continentis*, veluti Superficies à recta M N repræsentata. & ab oculi centro O prodeant utcunque duo radii O M, O N; qui in M F, N G refringantur; inter hos jam designetur objectum F A G (ab axe O A bisectum) hujus è medio F G M N spectati species (vel apparentia) alicubi consistet inter rectas O M, O N, veluti puta ad $\varphi \alpha \gamma$. cùm autem (ut ex hujusce superficiei natura, communique refractionum lege palàm est) sit angulus φ O γ major angulo F O G; hæc objecti speciem amplificat inflectio. item cùm puncta (sibi respondentia) F, φ; & G, γ ad easdem respectivè partes jaceant, ab eadem objecti posito non immutatur. quòd si punctorum φ, α, γ positio juxta superiorem doctrinam strictiùs exquiratur, de totius imaginis $\varphi \alpha \gamma$ figurâ distantiâque satis accuratum feretur judicium. Fig. 169.

Exemp. II. *Proponatur corpus densum* P M N Q, *Superficiebus planis parallelis* (M N, P Q) *comprehensum*; & ab oculi centro O prodeuntes radii O M, O N ad superficiem M N refringantur in M P, N Q; horum verò ad Superficiem P Q refracti sint P F, Q G (qui, propter incidentias (ad M, P, & N, Q) pares, ipsis O M, O N æquidistabunt) inter P F, Q G statuatur objectum F A G, cujus sit imago $\varphi \alpha \gamma$; tum verò manifestum est hîc se rem similiter habere ac in Exemplo præcedenti. Fig. 170.

Fig. 171. *Exemp.* III. *Proponatur circulus specularis concavus* M B N, & radiorum O M, O N reflexi sint M F, N G (se decussantes in H, & cum ipsis O M, O N concurrentes punctis X, Y) inter hos collocetur objectum F A G; ejus itidem imago rectis O M, O N interjacebit, puta ad $\varphi \alpha \gamma$. comparando jam angulos apparentes F O G, φ O γ, clarè vides objecti F A G speciem imminui. item cernis puncta sibi respondentia F, φ, & G, γ ad alias ac alias partes jacere, seu objecti situm hinc inverti. Quòd si intra angulum & spatium X H Y statui concipiatur objectum, clarum est hinc ejus quidem speciem ampliari, sed adhuc situm inverti. sin inter ipsa X Y consistat objectum, ejus itidem invertetur situs, at quantitas non immutabitur. demùm si intra angulum N H M constituatur objectum, puta R L S; cujus imago sit $\varrho \lambda \sigma$, evidens est hujusce speciem crescere, sitúmque retineri.

Fig. 172. *Exemp.* IV. *Proponatur circulus Specularis convexus* M B N; factísque similiter ac in eo quod immediatè præcessit omnibus, ne plura prodigam verba, vides objecti F A G speciem ($\varphi \alpha \gamma$) coarctari, sed ejusce positionem eandem persistere.

Fig. 173. *Exemp.* V. *Proponatur lens aliqua (exempli gratiâ, lens plano-convexa)* M B N Q P. Radii O M, O N ad superficiem M B N refringantur in M P, N Q; tum ipsi M P, N Q ad superficiem P Q refringantur in ipsos P F, Q G (sese decussantes in H, & cum ipsis O M, O N concurrentes ad X, Y) vides jam in prima figura, si objectum F A G infra X Y (versus H) statuatur, ipsum ab imagine $\varphi \alpha \gamma$ majus, quàm obtutu simplice, repræsentari. Quod si inter ipsa puncta X, Y subintelligatur collocatum, ejus quantitas neutiquam immutabitur. at si supra X Y statuatur objectum R L S, ejus species, ad $\varrho \lambda \sigma$ conspicua, diminuetur; ubique verò punctorum correspondentium positio directa permanebit.

Fig. 174. In altera verò figura (ubi refracti P F, Q G versus axem procurrentes convergunt) cùm objectum F A G citra punctum H sumitur, vides ejus speciem quantitate adauctam, at situ non mutatam. verùm objecti R L S ultra concursum H positi imago $\varrho \lambda \sigma$ nedum prototypo major est, at quoad situm etiam eidem inversa.

Et hoc quidem pacto nulla non lens pro varia vel objecti vel oculi positione, objecti speciem aliam exhibet ac aliam; nunc dilatat, tunc contrahit; modò rectam dat, mox inversam; subinde propiùs adducit, nonnunquam longiùs amovet. Singulos casus ad examen facilè rediges hoc ad specimen aciem mentis intendendo. Quinimo

Quinimò methodum hanc leviculam adhibendo pleraſque ſuperficierum quarumvis inflectentium hujus generis affectiones (illas nempe quæ magnitudinum apparentes quantitates, poſitiones, diſtantias, figuras reſpiciunt) compluriúmque *Phenomenon* cauſas ipſe ſtatim operâ levi deprehendes; quibus in expreſſius deducendis libri plures ad tantam molem extumeſcere vel poſſunt, vel ſolent; ut mihi ſaltem opus non ſit hujuſmodi plura congerere. veruntamen nè pars hæc nimium deficiat, & quoniam nonnulla ſuccurrunt animadverſione non indigna, de magnitudinum etiam apparentiis, tam *Diopricis* quàm *Catoptricis*, ſpecialia quædam proponam; ea verò commodius ſequentem præſtolabuntur Lectionem.

Huic interim, nè abnormiter curta ſit, aliquatenus explendæ *Problemation* hoc adnectam:

Exponatur oculo, cujus centrum O, longinquum objectum F G, ab oculi, circulíque refringentis axe A B O biſectum; datúſque ſit angulus ſimpliciter (oculo nempe nudo) apparens F O G. item aſſignetur punctum Z, quod imago ſit puncti A à circulo refringente facta; datus ſit denuò ex refractione apparens angulus P O Q; propoſitum eſt circulum iſtum refringentem deſcribere (vel determinare). Fig. 175.

Analyſis. Factum eſto; ſit nempe circulus B N, qualis requiritur, cujus ſit centrum C, vertex B; & qui rectam O P in N ſecet. ducatur C Y ad O F parallela, rectæque O P occurrens in Y, & connectatur C N. cùm itaque ſit N Y refractus radii ad F O, vel C Y paralleli; erit C Y. Y N :: R. I. ergò ratio C Y ad Y N datur; & cùm præterea angulus Y (dato F O P æqualis) detur, etiam (in triangulo C Y N) angulus C N Y innoteſcet. itaque triangulum C O N ſpecie datur; unde ratio C O ad C N (vel C B) datur. eſt autem C B. C Z :: I — R. R. ergò ratio C B ad C Z datur. itaque ratio C O ad C Z quoque datur; unde ratio C O ad O Z datur. verùm O Z datur; ergò etiam C O datur. hinc demùm & ipſa C B datur.

Componitur autem in hunc modum. In O F utcunque capiatur O ϱ; & fiat O γ. O σ :: R. I. & connectatur $\sigma \varrho \zeta$; ducatúrque Z R S ad $\zeta \sigma$ parallela. tum fiat O Z. Z T :: I — R. R (unde componendo O T. Z T :: I. R) item $V = \sqrt{ZT \times ZS}$; & $X = \sqrt{OZq - Vq}$; tum X. O Z :: O Z. Y. denique X. Y :: O Z. O C (unde erit X q. O Z q :: O Z. O C; hoc eſt O Z q — V q. O Z q :: O Z. O C; hoc eſt O Z q — Z T × Z S. O Z q :: O Z. O C). per C verò ducatur C N ad Z S parallela, ſecans O P in N. denique centro C per N ducatur circulus B N; is propoſito ſatisfacit.

Nam ob OZq — ZT × ZS . OZq :: OZ . OC ; erit OZ cub = OC × OZq — OC × ZT × ZS. transponendóque OC × ZT × ZS = OC × OZq — OZ cub. atqui propter OZ . ZS :: OC . CN . est OZ × CN = ZS × OC . quare OZ × CN × ZT = OC × OZq — OZ cub ; adeóque (elidendo OZ) erit CN × ZT = OC × OZ — OZq . vel CN . OC — OZ :: OZ . ZT ; hoc est CB . CZ :: OT . ZT . & componendo BZ . CZ :: OT . ZT :: I . R . itaque primò liquet punctum Z imaginem esse puncti A, ex refractione factam ad circulum BN. quinetiam ob CY . YN :: ρO . Oρ :: R . I ; palàm est NO refractum esse radii ad CY, hoc est ad FO paralleli. liquido proinde constat propositum. ||

In hoc casu debet esse OZq ⊏ ZT × ZS. Haud absimili ratione quoad alios casus (ut si circuli refringentis cavum objecto exponatur, &c.) peragetur negotium. ego specimen tantùm *instituti Problematis*, juxta quod visibilis objecti species per refractionem circularem secundum præstitutas quantitatem atque distantiam utcunque possit immutari. ||

APPENDICULA.

UT hæc paullò strigosior Lectio nonnihil incrassetur, faciam hic (quanquam alienore loco) quod alibi (si mihi tunc in mentem venisset) factum oportebat; raciociniis nostris adversantem, à viro doctissimo (alioquin opinor rarò dormitante) commissum paralogismum, nè cui fraudi sit, detegam ac amoliar; unáque doctrinam nostram confirmabo. horsum è præmissis consequens, sed & experientiæ (ut videbimus) consonum hoc præsterno: E refractione quavis (nec non è reflectione ad circulum) duobus oculis apprehensum objectum (puta lucidum punctum A) reverà duplum apparet, seu duas (ad minus) obtinet imagines.

Fig. 176. Nam à puncto A exeuntes inflectenti MN incidant duo quicunque radii AM, AN; quorum inflexi sint ME, NF; concurrentes in X; in his autem uspiam constituantur oculorum centra O, P. quòd puncti A imago nulla ad occursum X existat, è supra positis, ac probatis consectatur (omnes enim imagines ad illa consistere docuimus inflexorum puncta, ad quæ nulli illos alii inflexi intersecant) itaque duæ sunt imagines puncti A, una in inflexo EM (qualis α) ad oculum O pertinens; altera in inflexo FN (qualis a) oculo P deputanda.

Hinc liquet etiam magnitudinis cujusvis hoc modo spectatæ duplicem imaginem haberi.

Huic

Huic effato si contraria obtendatur experientia, monstrans subinde duntaxat unam imaginem apparere; regero, in refractione quidem ad superficiem planam apparenter hoc plerumque contingere, quoniam imagines istæ duæ (quales α, α) ita sibimet ipsis, ita refractorum concursui X vicinæ sunt, ut ipsarum intervallum discerni nequeat, ipsæque (sicut in simili casu obvenire mox ostendemus) velut in unam imaginem interceptibilitèr coalescant; ast in aliis diversi generis inflectionibus, etiam sensu contestante, manifestè secùs apparet; id quod cùm è compluribus admodum obviis experimentis constare possit, unum saltem ac alterum proponemus. Speculo B N M exponatur objectum A; tùm oculis, velut ad O, P constitutis, apparebit ejusce duplex species α, α; quarum illa (α) clauso oculo O, hæc (α) clauso P, disparebit. Fig. 177, 178.

Notetur autem, si placet, imaginum α, α intervalla (pro vario oculorum situ) nunc magis, nunc minùs deduci, sic ut subinde coadunari videantur. Nempe si oculus P ad F concipiatur translatus, ducatúrque F G ipsi P O parallela, & æqualis; unde jam & oculus O in C positus concipiatur; quoniam F E minor est quàm F G, radius M O per G non transibit; transeat alter inflexus L G; in hoc itaque jam consistet imago α, ab altera α magis elongata. Reliquarum hujusmodi diversitatum haud dispar assignari poterit ratio.

Adjungatur & hoc, an passim observatum nescio, dignum certè quod observetur: Ad speculum concavum R S M N faciem tuam F A G (speculo propiùs admotam) contemplare. Et primò quidem oculo O (altero P occluso) cernes ejus imaginem φ α γ; rursus (oculo O occluso) altero P conspicies imaginem fag, à priore φ α γ aliquantùm deflectentem; demùm utroque simul oculo recluso spectans illas in unam coalitas percipies; seu, speciem unam aspicies, perquam notabili discrimine, ampliorem priorum singularum alterutrâ. Fig. 179.

Exhinc, obiter, suspicari licet, etiam intuitum simplicem adhibentibus objecta binis oculis spectata tantillo majora videri, quam uno; speciebus ità coeuntibus, ut non exquisitè congruant.

Unicam prætereà subdemus instantiam: Per sphæram vitream (aut si mavis, per phialam conicam aut cylindricam aquâ repletam) M B N translucentem lucernulæ flammam A specta; ejus duas imagines α, α observabis (pro oculorum situ magis à se minúsve dissitas) quarum una (α) clauso oculo O, altera (α) clauso P evanescet. Fig 180.

Videtur hæc instantia vel sola sufficere vulgari sententiæ refellendæ; juxta quam (ut *Keplerus* alicubi colligit) puncti A simplex imago ad punctum X consisteret. *Paralipom. pag.* 178.

Has

Has instantias, facilitatis gratiâ, ità proposuimus, quasi punctum A, unà cum duobus oculis O, P in plano existeret ad superficiem inflectentem recto. id quod utrùm in experiendo præcisè contingat nécne, parùm refert; duas utcunque species apparere liquet. quin facilè concipitur etiam eo posito rem non aliter se habituram.

His prælibatis, illud discutiamus, quod innuimus, ψευδογράφημα; quo nempe *P. Herigonius* propositionem hanc suam comprobatum it: *In Dioptr.*

"Si oculus, & aspectabile sint in diversis mediis sê mutuo contingentibus, imago apparebit in concursu catheti, & radii ab oculo per punctum refractionis directè producti.

Fig. 181. Sit utique punctum F in medio densiori H L M N collocatum, quod ad oculos A, B radios F E A, F D B emittat refractos ad E, & D, & rectæ A E, B D conveniant in C; sit autem superficiei refringenti perpendicularis recta F G; erit (inquit) puncti F imago in recta F G. id quod ità demonstrat: Quoniam dicta imago tam in refracto A E, quàm in refracto B D existit, ergò in horum intersectione C existet. verùm intersectio C in recta F G existet; quoniam hæc communis est sectio planorum A E F, B D F superficiei refringenti rectorum. ergò liquet propositum.

In hanc demonstrationem adverto; 1. Supponit ea refractos A E, B D concurrere; quod tamen falsum est, præterquam in uno vel altero casu; quum nempe planum A B F in eodem existit cum ipsa recta F G plano; vel, cùm puncta A, B sunt in superficie coni recti, cujus axis est recta F G. quod si prior casus ponatur, è suprà demonstratis manifestum est refractos A E, B D non in recta F G, sed intra angulum F G H convenire; quod è principiis nostris elicitum illum saltem constringere debet, qui principia ista admittit ac amplectitur. 2. Hinc, illa demonstratio ipsam se perimit: Nam, quoniam (in posito casu) puncti F imago tam in recta A E, quàm in recta B D existit, adeóque in harum concursu; concursus autem iste non est in recta F G; ergò liquet dictam imaginem extra rectam F G versari. 3. Supponit iste discursus (ut & suppar ille jamjam prolatus) puncti F unicam oculo utrique imaginem apparere; quod πρῶτον ψεῦδος erat, à nobis paullò supra refutatum. Enimverò diversi oculi sunt reipsâ diversi spectatores. hæc, opinor, ratiocinium illud satis enervant. ||

Lect.

Lect. XVI.

I. *Punctorum ex inflectione determinatis apparentibus locis*, conquiescere possem; siquidem exinde magnitudinum apparentiæ deducuntur, quotlibet in ipsis existentium punctorum imagines designando. cæterùm nè justo parcius in hac parte, vel illiberalius egisse videar, etiam *de rectarum linearum (consequenter & planarum superficierum, quibus distinctè visui repræsentandis natura præcipuè consuluisse videtur) apparentiis & imaginibus expressiora specimina quædam haud gravabor adnectere*. de quibus etiam circa reliquarum magnitudinum apparentias propius ac promptius fiat judicium.

II. Notetur autem imprimis; Sicuti (quod sæpiùs in antedictis habetur insinuatum) cujusque puncti quodammodo duplex est imago; una simplex, absoluta, principalis; illa scilicet, quæ in recta versatur ad superficiem inflectentem perpendiculari, perque radians punctum simul ac oculi centrum transeunte (hoc est in communi lucidæ radiationis, superficiei reflectentis, ipsiúsque visionis axe) altera verò relata, mutabilis, ac minùs præcipua; quæ talis est respectu oculi extra rectam inflectenti superficiei perpendicularem arbitrariè constituti; ità pari fermè modo duplex cujusque magnitudinis imago concipi potest una quidem absoluta (quam saltem hoc nomine designabo) quæ ex punctorum singulorum in ipsa existentium absolutis imaginibus quasi conflatur, illas saltem comprehendit (qualis in objecta congrua superficie vividè deformaretur; qualisque videretur oculo ad infinitam ab inflectente superficie distantiam ritè collocato) altera verò relata, quæ oculum respicit ubivis in certa positione constitutum; quid velim, & quare sic distinguam ab exemplis benè multis in decursu proponendis luculenter apparebit.

III. *Super-*

Fig. 181. III. *Superficiem planam media dirimentem (aquam si placet ac aërem)* repræsentet recta P Q, & aquæ insit recta F P ad P Q perpendicularis. fiat autem F P. X P :: R. I; erit X P imago absoluta rectæ F P; continet illa scilicet omnes locos punctorum, quæ in F P, oculo apparentes in ipsa F P sito. verùm si ponatur oculus uspiam extra F P, velut ad O, ei tota F P citra X P apparebit. transeat videlicet alicujus radii F M refractus per O, & protrahatur O M, ut occurrat ipsi F P in K. est ergò (secundum præmonstrata) punctum K inter X, & P. itidem (è prius ostensis) puncti F imago quæ in refracto O M K, ad oculum O relata, inter K, & M cadit, veluti puta ad φ. simili ratione cujusvis alterius in ipsa F P accepti puncti, ceu R, imago (cogita ρ) citra rectam X P, versus oculum, jacet. totius itaque rectæ F P imago talis est, qualem curva linea φ ρ P refert. quòd si P F infinitè protrahatur, ejus totius imago P ρ ρ versus asymptoton O B A, ad P F parallelam, accedens excurrit.

IV. *Delineatur autem curva P ρ φ hoc modo*. ab O ducatur utcunque recta O M K secans rectam P Q in M; & (posito fore $S = \sqrt{Rq - Iq}$) sit $PH = \frac{Sq \times PM\,cub}{Iq \times FPq}$; atque per H ducatur Hφ ad P R parallela, ipsi O K occurrens in φ; erit φ in dicta linea; nempe, si O M K ipsius M F refractus concipiatur, erit punctum φ ipsius F imago. eodem modo reliqua lineæ P ρ ρ puncta designantur.

Fig. 182. V. Quinetiam adsumptâ rectâ F G ad P Q parallelâ, ductâque G Q ad F P (vel A B O) parallelâ; item per X ductâ X α Y ad P Q parallelâ, erit quidem recta X α Y rectæ F A G imago absoluta; verùm ejus imago ad oculum O relata citra rectam X Y tota jacet, eámque curva φ α γ repræsentat, admodum jamjam præscriptum punctatim delineabilis. itaque compositæ lineæ P F G Q, circa axem O B A rotatæ, imago fornicem referet arcuatam. id quod experiri vos velim vasculi cylindrici aquâ repleti superficiem inspectando.

Fig. 183. VI. Quòd si recta visibilis F G ad P Q inclinata sit, cum ea conveniens in V; & connectatur X V, erit rursus X Y ipsius F G imago absoluta; relatam verò curva φ α γ repræsentat.

Fig. 184. VII. Quòd si vicissim *oculus O in aqua ponatur constitutus*, & ab indè respiciatur recta P F in aëre posita, fiátque rursus P F. P X :: R. I;

R. I; erit quidem X P imago rectæ F P absoluta; at ejusdem imago relata (puta $P\varrho\varphi\varsigma$) ultra P F R jacet, ab illa sensim reclinans; ejúsque puncta quælibet ità signantur. Ab O ducatur recta O K utcunque rectam P Q secans in M, & sit K M ipsius F M refractus, tum (posito rursus $S = \sqrt{Iq - Rq}$) fiat $PH = \frac{Sq \times PMq}{Iq \times PFq} PM$, & per H ad P F parallela ducatur $H\varphi$, ipsam O M K intersecans ad φ; erit punctum φ in dicta linea, punctum scilicet F repræsentans. eodémque modo puncta quotlibet alia deprehendes.

VIII. Similiter rectæ F G ad ipsam P Q parallelæ, vel inclinatæ imago relata $\varphi\alpha\gamma$ (in partes arcuata contrarias illis, ad quas prioris casûs imago videbatur incurvata) determinabitur. rem apposita figura satis exprimit.

Hæc autem omnia de suprà comprobatis dilucidè consectantur.

IX. Ac ità quidem circa simplices planas superficies refringentes sese res habet. Quòd si corpori parallelis planis M N, $\mu\nu$ terminato exponatur recta F G; Sint rectæ F P, G Q, A D B O ipsi P Q perpendiculares, & fiat B D . B S :: I . R; adsumatúrque $A\alpha = DS$; & fiat $AB . \alpha C :: FP . XP$; & per X, α ducatur recta $X\alpha Y$, erit $X\alpha Y$ lineæ F A G imago absoluta. Ergò ejus imago ad oculum O relata (in hoc casu) citra ipsam $X\alpha Y$ versus superficiem $\mu\nu$ nonnihil incurvata disponetur, qualem exhibet linea $\varphi\alpha\gamma$. id quod ex eo satis videtur liquere, quòd recta $X\alpha Y$ sit imago respectu oculi in ipsa O B à B infinitè semoti. designari verò poterit hæc imago ad hunc modum. sit fag (minusculis elementis indigitata) imago rectæ F A G ad superficiem refringentem $\mu\nu$ relata (hoc est ad oculos in refractis $f\mu M$, $q\nu N$, a D B, reliquísque, nec non in medio $\mu\nu M N$ versus O protenso, sitos) juxta proximè commonstrata delineabilis. tum hujus ipsius fag velut in medio M N $\mu\nu$ versus A protenso positæ, ex refractione ad superficiem M N emergens, & ad oculum O relata construatur imago $\varphi\alpha\gamma$ (itidem ad modum nuperrimè præscriptum) hæc rectam F A G per corpus M N $\mu\nu$ spectatam repræsentabit. experientia testis advocetur, ego pluribus in re perplexiore, quàm utiliore supersedeo. Fig. 185.

X. Porrò quod *plana specula* (simplicia, vel composita) attinet, in iis palàm est imagines absolutas ac relatas omnino sibi coincidere; quo fit, ut ex objectorum magnitudines, figuras, distantias (situ

tamen nonnunquam inverso) quàm exactissimè referant. qua de re (tam facili, toties acta) penitùs reticens ad minùs trita me promoveo.

Fig. 186. XI. Sit jam *Circulare Speculum convexum* DMB, cujus centrum C; & per C protendatur recta CBA; in qua sumatur portio quædam AR, fiátque CA.AB::CX.XB; neq; non CR.RB::CY.YB; erit YX imago absoluta rectæ RA; quòd si CB bisecetur in Z; erit BZ totius BA ad infinitum exporrectæ imago absoluta; hoc est, illæ tales erunt oculi respectu in ipsa AB constituti. secùs autem uspiam collocato oculo, tanquam ad O, totius AB quod conspicuum est (hoc est quod supra horizontem OT, speculo contiguum extat) supra citráque XB apparebit. Enimvero transeat radii AM reflexus KMO per O; itaque punctum K (quod olim ostensum) supra punctum X, versus A, extat. quinetiam (ex indidem monstratis) puncti A imagines omnes, oculum O respicientes, ex reflexione factæ ad partes BMD, citra CA versus O, cadunt. ejus igitur imago quæ in OK, puta α, in ipsa KM existet (id quod etiam, nè quis dubitet, exertius mox ostendemus). simili ratione puncti R imago, cogita ρ, supra Y, citráque BY jacet. quòd si porrò per O transeat recta ODLH, quæ reflexa sit rectæ DS ad CA parallelæ (hæc autem quomodo ducatur, antehac declaratum habetur) erit in ODL imago puncti (quale concipiatur S) in ipsa AB infinitè semoti; hæc puta sit ad σ. erit itaque curva Bρασ imago totius infinitæ rectæ BAS, ad oculum O relata.

XII. Ista verò linea tali pacto delineatur: Super diametrum CO describatur circulus OTC; & ab O ducatur recta quæpiam OMF, cujus reflexa sit MA; in qua sumatur ME = MF; tum secetur FM in α, ut sit Fα.αM::AE.AM; erit (è pridem demonstratis) punctum α puncti A imago. simili modo quotcunque lineæ Bαρσ puncta reperiuntur.

XIII. Quòd autem sit punctum α citra K (versus oculum) ità constabit. Ducatur FQ ad AM parallela. est ergo angulus FQA par angulo CAM. ast angulus FCA angulo ACE minor est. ergò est CF.FQ ⊏ CE.AE. atqui CF = CE; quare FQ ⊐ AE. ergò est FQ.AM ⊐ AE.AM. hoc est FK.KM ⊐ Fα.αM. componendóque FM.KM ⊐ FM.αM. unde KM ⊏ αM. adeóque punctum α citra K versus O jacet: Q.E.D.

XIV. Exhinc

XIV. Exhinc *Euclidis*, *Alhazeni*, communíſque fermè ſententia convellitur, quæ rectæ B A rectam B K, infinitæque B S ipſam B L imagines ſtatuit; proindéque corruunt omnia, quæ principio ſuperextruunt iſti gratis adſumpto, rationique diſſentaneo. Veruntamen *Opticorum noviſſimus ſcriptor, eruditiſſimúſque vir*, veterum ipſe veſtigiis inſiſtens poſtulatum iſtud ab experientia ſtabilitum vult, ejúſque veritatem ſeſe deprædicat centies exploràſſe; doctrinam itaque noſtram invicto ſenſûs teſtimonio refutavit. atqui repono, non potuiſſe illum quantumvis oculatum & ſagacem quod obtendit vel ſemel explorare. nec hoc in caſu poterit doctrina noſtra tentari, nedum refelli. nam (præterquam quòd perpendicularis C B A ſitum exactè dignoſcere perquam arduum, forſan impoſſibile fuerit) quum lineola $B\alpha\rho\sigma$ infinitam, juxta nos, lineam rectam B S repræſentet, ipſúmque punctum σ (infinitè diſſito puncto S reſpondens, atque rectam D H biſecans) à puncto L modicè diſtet, quæ amabò viſûs acies curvæ $B\alpha\sigma$ à recta B L deflectionem cernat? itaque fruſtrà eſſe videtur acutiſſimus vir, ad teſtem provocans hac in parte minùs competentem, déque cujus ſententia vix ullatenus conſtare poſſit. Sanè quoad affinem in *Dioptricis* caſum, quem attigimus ſupra, demiſſo in aquam perpendiculo, oculo ſimpliciter inſpectanti, videbitur ejus imago nihil quicquam à perpendiculari declinans; verùm ope reflectionis juſtum perpendicularis ſitum obſervando (qui nudo ſcilicet obtutu planè dijudicari nequit) notoriè deprehenditur aquæ immerſi perpendiculi imago ab ipſo deviare. neque dubito quin pariter in præſente caſu ritè conſulta experientia pro nobis ſit pronunciatura. Quinimò noſtris ex effatis (luculentâ opinor ratione ſuffultis) apparebit, unde principium illud multis in caſibus experientiæ videatur conſentire; quoniam nempe contingit, ut in iis à vero non multùm abſcedat; ejúſque proinde falſitatem ſenſus (niſi ratione, vel certiore ſenſu adjutus) perſpicere nequeat. aſt exorbito.

XV. Sit rurſus *Speculum concavum* B M D; cujus centrum C, & per C extendatur infinita recta C B L, biſecetúrque ſemidiameter C B in Z; ac in Z B ſumptis quibuſcunque punctis A, R; fiat C A. A B :: C X. X B; itémque C R. R B :: C Y. Y B; erit quidem infinita B L totius B Z imago abſoluta, & portio Y X portionis R A; verùm extra axem B C uſpiam conſtituto viſu, velut ad O, ad hunc relatæ ipſius Z B, ejúſque partium imagines ità determinantur. Fig. 187.

Fig. 187. XVI. Ad diametrum CO describatur circulus CFH; & ab O radius incidat talis, ut cum ejus reflexus sit DS, contingat fore DS $= \frac{1}{2}$ DH, vel $\frac{1}{2}$ DI; positâ CI ad DS perpendiculari (talis autem radius facilè duci posse concipiatur; & per curvam appropriatam reverà statim determinetur; id proinde nos non distinebit). Erit tum puncti S imago, puta σ, à puncto D infinitè disjuncta; quoniam (id quod fieri nequit, nisi Hσ, σD sint infinitæ) est Hσ. σD :: IS. SD. Jam in arcum DB cadat utcunque radius OM, cujus reflexus sit MAE; & in hac sumatur ME = MF; tum in OM producta capiatur punctum α, ut sit Fα. αM :: EA. AM; erit α puncti A imago. simili methodo reperiatur ρ puncti R imago; neque non reliqua totius Bρασ, ipsam BS referentis, puncta.

Fig. 187, 188. XVII. In hanc verò constructionem quædam veniunt adnotanda.

1. Quòd CS ⊏ CZ. Nam 4CZq = CBq = 3SDq + CSq. ergò quum sit CZ ⊏ SD; erit CS ⊏ CZ.

2. Quòd CA ⊏ CS. Nam (è suprà monstratis) si ducatur recta Mψ ad DO parallela, ejusce reflexa (puta Mξ) secabit ipsam DS, versus I, puta ad ξ. ergò Mξ ipsam CB secabit supra punctum S, velut ad φ. atqui quoniam ang. CMO ⊏ CMψ, seu ang. CMA ⊏ CMφ, est CA ⊏ Cφ; adeóque magis est CA ⊏ CS.

3. Quòd EA ⊏ AM. cùm enim sit EM (vel FM) ⊏ HD, atque DS ⊏ MA; erit EM. MA ⊏ FD. DS :: 2.1.

4. Hinc denuò liquebit totam lineam Bρασ ultra rectam CBL jacere. nam ducatur FQ ad AM parallela est hìc ang FCA ⊏ ang ACE. & ang FQA = ang CAE. quapropter erit CF. FQ ⊐ CE. AE. adeóque FQ ⊏ AE. ac indè FQ. AM ⊏ AE. AM; hoc est FK. KM ⊏ Fα. αM. dividendóque FM. KM ⊏ FM. αM. quare αM ⊏ KM. adeóque punctum α ultra K in recta OK protensa jacet.

XVIII. Quòd si ad partes alteras rectæ OD ducatur radius ON cujus reflexus NGT = NV; sitque TG. GN ⊐ 2.1; statuenda est puncti G imago (puta γ) ad partes O. quinimò cùm in hanc rem plura subjici possent, ego jam *Specimina* tantùm instituens (quippe cùm operâ dignum haud arbitrer adeò tenuem materiam curiosius prosequi) à minutiis abstineo. quò & indè pronior sum, quoniam in hac re copiosus videtur *A. Tacquetus*; subinde quidem is, ob admissum istud falsum principium, cespitans, at bene multa credo sugge-

suggerens haud aspernanda. relinquantur igitur ei cætera, mihi sufficerit, quòd veriorem *Phænomena* detegendi declarandíque methodum adnisus sim aliquatenus enucleare. pergamus ad alios casus, haud ità pertractatos.

XIX. Objiciatur speculo MBND recta FAG, rectæ CA (per speculi centrum C transeunti) perpendicularis; adverto, si fuerit ipsa CA major quàm CZ, quadrans diametri BD, quòd rectæ FAG ad infinitum utrinque protractæ ad totum circulum (ejus ad partes intelligo concavas simul ac convexas) imago absoluta (quinetiam imago ad oculum in ipso centro C constitutum relata) erit *Ellipsis*. item si CA minor sit, quàm CZ, quòd ipsius FAG imago absoluta (vel dicto modo relata) constabit ex hyperbolis oppositis; si denuò CA ipsam CZ adæquet (vel FG per ipsum Z transeat) quòd ad parabolam ejusmodi consistet imago. Sed modum transgrederer hæc jam aggrediens demonstrare. Expectent igitur. || Fig. 189.

LECT. XVII.

I. AD ea, quæ sub finitam præcedentem proposuimus demonstranda *necessariam*, *alioquin notabilem*, *Conicarum Sectionum proprietatem* imprimìs ostendemus.

Sit triangulum ACE, rectum habens angulum ad C; & indefinitè protractis lateribus AC, AE, in AC sumatur quod piam punctum X, ducatúrque XG ad CE parallela; inferatur autem angulo CXG recta CZ æqualis ipsi XG; dico punctum indeterminatum Z ad sectionum conicarum aliquam consistere. Fig. 190.

II. Nempe primò, sit angulus A semirecto minor (vel AC ⊏ CE) erit punctum Z ad ellipsin, quæ determinatur hoc pacto: Anguli LCP semirecti fiant (ad utramque rectæ CE partem) liquet igitur rectas CP ipsi AE occurrere, puta ad puncta R, & S. ab his

ad

ad ipsam E C parallelæ ducantur rectæ R T, S V; palàm est indeterminatum punctum X inter limites T, V consistere (nam extra T V punctum quodlibet L accipiendo, & indè ducendo L I P ad C E parallelam, erit C L, hoc est L P, major quàm L I, unde à C ad rectam L I, nulla duci recta potest æqualis ipsi L I). Jam autem dico, quòd punctum Z ad ellipsin existit, cujus axis T V, focus C. Nam bisecetur T V in K; fiat $VD = TC$; ducatur K H ad C E parallela; per H ducatur H N ad C K parallela. Estque $KH = \frac{TR + VS}{2} = \frac{CT + CV}{2} = KT = KV$. Et quoniam $AV . AT :: (VS . TR$ (hoc est) $:: CV . CT ::) CV . DV$; erit per rationis conversionem $AV . TV :: CV . CD$. vel, consequentes subduplando, $AV . KV :: CV . CK$. dividendóque $AK . KV :: KV . CK$; hoc est $AK . KH :: KH . CK$. hoc est $HN . NG :: KH . CK$. quare $KH \times NG = CK \times HN = CK \times KX$. atqui est $CZq = XGq = KHq + NGq + 2 KH \times NG$. & $CXq = CKq + KXq + 2 CK \times KX = CKq + KXq + 2 KH \times NG$. ergo $KHq + NGq - CKq - KXq = CZq - CXq = XZq$. Ad alteras bisegmenti K partes sumatur $K\xi = KX$, ducatúrque $\xi\nu$ ad K H parallela, secans curvam T E Z V in ζ, & rectam A H in γ, ac ipsam N H in ν; erit quoque, simili ex discursu, $\xi\zeta q = KHq + \nu\gamma q - CKq - K\xi q$; unde liquet fore $\xi\zeta = XZ$; connexísque proinde rectis $C\zeta, D\zeta$, erit $D\zeta = CZ$; & $C\zeta + CZ = \xi\gamma + XG = 2 KH = TV$. ergò $C\zeta + D\zeta$ (vel $DZ + CZ) = TV$. unde perspicitur *curvam* $T\zeta ZV$ *esse ellipsin*, cujus *axis* T V; *foci* C, D.

Fig. 191. III. Sit autem secundò angulus C A E major semirecto (vel $AC \sqsupset CE$) dico punctum Z ad oppositas hyperbolas, consimili modo determinabiles, existere. enimverò factis (ad utramque rectæ C A partem) angulis semirectis A C P; & (ab ipsarum C P cum A E occursibus) ductis rectis R T, S V ad C E parallelis, punctum X extra limites T V necessariò consistet (etenim ubivis intra T V ductâ L I P ad C E parallelâ, erit $LI \sqsupset LP$, ideóque nulla par ipsi L I angulo A L I subtendi potest; id quod extra terminos hosce nil prohibet fieri) erit jam T V axis, & C focus hyperbolarum. Fiant enim omnia, quæ in casu præcedente; eritque rursus hic $KH = KV$. item ob $AV . AT :: CV . DV$; & (inversè componendo)

AV.

AV.TV : : CV.CD; & conſequentes ſubduplando, dividendóque AK.KV : : KV.KD : : KV.CK. vel AK.KH : : KH.CK; hoc eſt HN (KX). NG : : KH.CK; quare $CK \times KX = KH \times NG$. eſt autem $XZq = CZq - CXq = XGq - CXq = NGq + KHq - 2NG \times KH : - KXq - CKq + 2CK \times KX = NGq + KHq - KXq - CKq$. Sumatur $K\xi = KX$, diſcurſúmque ſimilem adhibendo liquebit fore $\xi\zeta = XZ$; & ideò $D\zeta = CZ$. unde $C\zeta - D\zeta$ $(DZ - CZ) = C\zeta - CZ = \xi\gamma - XG = 2KH = TV$. quare manifeſtum eſt *curvas* TZ, $V\zeta$ eſſe *Hyperbolas*, quarum axis TV, foci C, D.

IV. Tertiò demùm, ſit angulus CAE ſemirectus (vel $CA = CE$) erit tum punctum Z ad parabolam; quæ itidem ità determinatur. Fiat angulus ACP ſemirectus, & ab ipſarum AE, CP interſectione R ducatur RT ad CE parallela; erit T *Vertex*, atque C *Focus Parabolæ*. id quod ex bene nota ſectionis hujus proprietate conſtat; qua ſcilicet eſt $TA = TR = TC$. (ob angulos TAR, TCR ſemirectos) & $AX = XG = CZ$. Fig. 192.

V. Manifeſtum eſt verò rectam AE ſectiones has ad E contingere. quia nempe perpetuò major eſt CZ (vel XG) ordinatâ XZ; adeóque puncta G extra curvas unaquæque jacent hoc eſt tota AG extra illas cadit.

VI. Hiſce præſtratis: *Eſto Circulare ſpeculum* MBND, centrum habens C; cui exponatur recta quæpiam $F\alpha G$; & huic perpendicularis ſit recta $C\alpha$; quam ad partes averſas ſumpta CA, adæquet. Sit etiam CE ad CA perpendicularis, ac æqualis quadranti diametri BD; connexáque recta AE producatur utcunque. ſumpto jam in recta $F\alpha G$ puncto quolibet F, connectatur FC, & radiationis ab F in ipſa FC limes, ſeu *focus*, ſit Z; ac per Z ducatur ZX ad AC perpendicularis, ipſi AE occurrens in H; dico fore XH parem ipſi CZ. Fig. 193.

Nam (è jam antè monſtratis) eſt FC.CZ : : FM.MZ (hoc eſt) : : $FC - CB . CB - CZ$. hinc erit $\alpha C . CX$ (AC.CX) : : $FC - CB . CB - CZ$. quare (ducendo in ſe extrema, ac media) erit $AC \times CB - AC \times CZ = CX \times FC - CX \times CB$. hoc eſt (ipſi $CX \times FC$ ſubſtituendo $AC \times CZ$, propter $\alpha C . CX$: : FC.CZ) erit $AC \times CB - AC \times CZ = AC \times CZ - CX \times CB$. tranſponendóque $AC \times CB + CX \times CB = 2AC \times CZ$.

hoc

hoc est $AX \times CB = 2AC \times CZ$; vel $2AX \times CE = 2AC \times CZ$; unde $AX . AC :: CZ . CE$; hoc est $XH . CE :: CZ . CE$. quapropter est $XH = CZ$: Quod E. D.

Quoad radiationem ad partes concavas, planè similis est discursus: examinetis ipsi, peto.

Fig. 193, 194, 195. VII. Exhinc evidenter liquet, si fuerit $CA \sqsubset CE$; quòd omnes punctorum F limites, seu foci (quales Z) ad ellipsin existunt; cujus *focus* C, & cujus *axis* TV è præmissis, non uno modo, determinatur. item si $CA = CE$, limites Z ad parabolam consistent cujus *focus* C, *axis* $CT = \frac{1}{2} CE$, *vertex* T. denuò, si $CA \sqsupset CB$, puncta Z ad *hyperbolas esse constat*, quarum itidem *focus* C; & *axis* TV facilè de modò (vel alibi) dictis reperitur; cunctarum verò sectionum *Parameter* ipsi CB æquatur.

VIII. Hinc in singulis respectivè casibus, ejusmodi *sectiones conicæ* sunt rectarum FαG absolutæ imagines; quin & eædem veræ sunt imagines ad oculum relatæ in speculi centro constitutum; ex reflectione scilicet ad concavas speculi partes effectæ; quæ solæ oculo sic posito conspicuæ sunt.

IX. Patet autem si recta FαG infinitè distet, quòd *ellipsis* in *circulum* abit. utì quoque si FαG per centrum transeat, quòd *hyperbolæ* istæ in rectam lineam degenerant.

X. Subnotetur etiam in casu quum *imago sit hyperbolica*, quod *hyperbola* YTY pars YEEY, neque non tota ζVζ ad circuli partes MBN pertinent; (nempe si centro C per E descriptus circulus ipsam FG intersecet punctis K, tota hyperbola ζVζ rectam interceptam KK referet; & hyperbolicæ lineæ alterius pars superior YEEY quod reliquum est repræsentabit hinc indè protensæ rectæ FG) pars autem FTE ad partem concavam MDN spectat. id quod suffecerit admonitum.

Fig. 196. XI. Et hæc quidem de rectæ FAG imaginibus absolutis; è quibus commodius de relatis judicum fiet. sit, instantiæ loco, oculus O, ad quem (convexis è partibus) ab F, & G reflectantur OMK, ONL; & sit ellipsis ZVYT absoluta (qualem modò definivimus) rectæ FAG imago; quam ductæ FC, GC punctis Z, Y secent. itaque punctorum F, G imagines ad O relatæ (puta φ, & γ) extra ellipsin

ellipsin jacent. Nam punctum K inter F & Z; ac punctum φ inter O, & K; nec non punctum L inter G, & Y; atque punctum γ inter O, & L cadunt. imaginis itaque φαγ figura ad ellipticam accedit; eâ tamen aliquanto planior & compressior. non dissimili ratione quoad imagines ad concava factas, & quoad cæteros casus instituetur judicium. tædii plenum esset omnia singillatim percensere. quinetiam è præmissis luculentè constat quo pacto linea φαγ præcisè describatur, punctatim utique. circa refractiones paria veniunt præstanda; postquam tamen paullùm respiravero; nunc enim verbo quidem pauca, rei qualitatem, studiúmque demonstrandis istis impensum respectando, satis fortasse multa videor tradidisse. ||

LECT. XVIII.

I. *Propositum est jam nobis recta linea ex refractione prognatas ad circulum imagines assignare*; nempe primùm absolutas; quorsum hoc spectat *Theorema*:

In circulum (e.g. medii densioris) refractivum MBND radiet recta FAG; huic verò perpendicularis sit recta CA (circuli centrum C permeans) tum in recta FG sumpto liberè puncto F ducatur recta FC, & in hac sit punctum Z limes (qualem anteà fiximus) radiationis à puncto F; sit autem ZX ad AC normalis. porrò fiat CA. CR :: I. R; & AR. CB :: CR. CE (ponatur autem CE ad XZ parallela) tum connexa RE cum ipsa XZ conveniat in H. dico fore XH = CZ. Fig. 197.

Nam (è præmonstratis) est FC × MZ. FM × CZ :: I. R :: CA. CR. hoc est FC × CM + FC × CZ. FC × CZ − CM × CZ :: CA. CR. quare (ducendo in se extrema, mediáque) est FC × CM × CR + FC × CZ × CR = FC × CZ × CA − CM × CZ × CA = FC × CZ × CA − CM × FC × CX (quoniam scilicet est R CZ.

$CZ . FC :: CX . CA$; adeóque $CZ \times CA = FC \times CX$). quapropter (elidendo FC) est $CM \times CR + CZ \times CR = CZ \times CA - CM \times CX$; transponendóque $CM \times CR + CM \times CX = CZ \times CA - CZ \times CR$. hoc est $CM \times RX = CZ \times AR$. quare (ad analogismum redigendo) est $AR . CM :: RX . CZ$. hoc est $CR . CE :: RX . CZ$. hoc est $RX . XH :: RX . CZ$; unde $XH = CZ$: Quod E. D.

II. Exhinc (& ex iis quæ circa *sectiones conicas* nuperrimè sunt ostensa) liquido consectatur, si C R major fuerit quam C E (vel quod eódem recidit, A R major quam C B) quòd punctorum omnium F in recta F A G imagines absolutæ (quales Z) ad *ellipsin* consistent, cujus *Focus* C, cujúsque penitus determinandæ modum satis facilem tunc ostendimus. item si $CR = CE$, quòd imagines istæ ad parabolam erunt; & denique, si $CR \sqsupset CE$, quòd eædem in hyperbolis oppositis reperientur; quarum etiam sectionum focus communis est punctum C, & quarum axes designandi modum reliquáque circa ipsas præsertim advertenda declaravimus. (Nempe, si rectæ C P cum ipsa C A semirectos constituant angulos; & hæ rectam R E intersecent ad puncta S, indéque demittantur ad A C perpendiculares S T, S V, erunt T, V axis termini, rectáque C E semi-parameter erit) unde patet totius rectæ F A G ad infinitum protensæ absolutam imaginem (quin & illam, quæ ad oculum in centro C positum refertur) aliquam esse dictarum conicarum, pro suo peculiari situ hanc vel illam respectivè.

Fig. 198. III. Adnotari porrò debet in isto casu, *sectionis ellipticæ* (quinetiam & *parabolicæ*) T E Z partem anticam T E ad concavas circuli partes L D L spectare; sicuti postica E Y ad convexas M B N pertinet. in hoc autem altero tota *hyperbola* Z V Z, nec non *hyperbolæ* E T E pars (intra E C E) Y E E Y ad partem circuli convexam referri debent (nempe si centro C, intervallo C E descriptus circulus rectam F G secet punctis K, K; hyperbola Z V Z rectam interceptam K K repræsentabit, ipsiúsque F G quod reliquum est hinc indè protensum pars Y E E Y referet) pars autem superior E T E ad cavam circuli partem L D L spectat. || Semper autem (cùm hic, tum ubique) intelligatur ad utrasque propositi circuli partes ejusdem generis refractionem effici, seu ejusdem speciei medio radios incidere.

IV. Ex his obiter naturæ, quam in oculi figura construenda adhibuit,

buit, solertia quadantenus elucescere videatur, seu ratio quædam assignari possit, cur oculi fundus *Sphæro dicam* (aut ab hac non multum abludentem) nacta sit figuram. quia nimirum illa planorum objectorum modicè distantium (quibus in distinctius apprehendendis potissimus versatur usus) excipiendis simulachris est accommodatissima. Sed hoc παρεισοδικῶς.

V. In reliquis refractionum casibus paria fermè contingunt, quos ideò tacitus præterlabi possem; at minuendo vestro labori, seu quò clariùs & promptiùs de iis constet, non gravabor & illos vobis ob oculos ponere: nempe

Rarioris medii circulo M B N objiciatur recta F A G, cui normalis C A; sitque punctum Z puncti cujusvis F, in F G sumpti, imago absoluta; & Z X ad C A perpendicularis; ac C A . C R :: I . R; & R A . C B :: R C . C E; & ipsi R E connexæ occurrat X Z protracta ad H; eritque rursus X H = C Z. Fig. 199.

Nam est C A . C R :: (F C × M Z . F M × C Z ::) F C × C Z — F C × C M . F C × C Z — C M × C Z. quare C R × F C × C Z — C R × F C × C M = C A × F C × C Z — C A × C M × C Z = C A × F C × C Z — F C × C M × C X. ac indè C R × C Z — C R × C M = C A × C Z — C M × C X. transponendóque C R × C Z — C A × C Z = C R × C M — C X × C M; hoc est R X . C Z :: A R . C M :: R C . C E :: R X . X H. quapropter est C Z = X H.

VI. Hinc dilucidè rursus apparet rectæ F A G imaginem absolutam (vel ad oculum in centro C situm relatam) si R C ⊏ C E, *ellipticam* fore; sin R C = C E, fore *parabolicam* (quarum sectionum pars anterior E T E ad convexam circuli refringentis partem M B N pertinet, posterior Y E E Y ad cavam L D L). Quòd si fuerit R C ⊐ R E, ejus *imago hyperbolica erit*; & quidem *hyperbolæ* Y T Y pars superior E T E ad circuli partem N B N referenda est; pars autem inferior Y E E Y unà cum tota hyperbola ζ V ζ ad partes concavas L D L pertinebit. nempe si fuerint rectæ C K æquales ipsi C E, tota hyperbola ζ V ζ interceptam punctis K rectæ F G portionem referet, ejúsque quod hinc indè protensum superest ab ipsa Y E E Y repræsentabitur. Fig. 200.

VII. Porrò, quoad omnes hosce casus animadvertere licet posse sectionem eandem conicam innumeris rectis lineis ad diversos circulos

concentricos expositis repræsentandis inservire. nimirum in casu postremo, si reliquis stantibus punctum A indeterminatum ponatur, nihilominus hyperbolæ ζυζ, YTY rectas FAG repræsentabunt ad circulos, quorum semidiametri CB ipsis AI singulæ respectivæ singulis æquantur, modò semper intelligatur esse CA.CR::I.R. id quod satis fuerit obiter admonuisse.

VIII. Ut & illud cursim innuisse suffecerit, quòd sicut à conicis sectionibus rectæ lineæ, ita vicissim *conicæ sectiones* à rectis lineis ex justa congruos ad circulos inflectione repræsentantur; quos utique non arduum videtur è præmissis deducere.

IX. Ut & exindè *datâ conicâ sectione* circulus & recta facilè designantur, ità ut conica rectam illam repræsentet ex inflectione ad istum circulum. Nempe si à foco C ad axem CV applicetur normalis CE; & recta ER sectionem tangat ad E; factoque CR.CA:: R.I; ducatur per A recta AI ad CE parallela; sitque CB = AI; tum centro C per B ducatur circulus MBN, peractum erit negotium.

X. Ex his tandem de imaginibus ad oculum ubicunque collocatum relatis, quales illæ figuras ac situs obtinent, proclivius erit judicare. scilicet eæ saltem unum (in recta per oculi, circulique refringentis centrum trajecta positum) commune cum absolutis punctum habent; quoad reliqua verò respectiva puncta nonnihil ab his deflectunt ad eas partes, quas oculi situs peculiaris, & radiorum cursus exigunt; id quod facilius sit in singulis casibus qualiter eveniat perspicere, quàm verbis universim explicare. sed enim unam rei declarandæ subjiciemus instantiam. Ad oculum O refringantur ab F, & G radii FMO, GNO; sit autem *ellipsis* TZVY rectæ FG absoluta imago, quam connexæ FC, GC punctis Z, Y secent (ità quidem ut Z sit puncti F, & Y puncti G imago absoluta) enimverò, de supradictis colligitur punctum K supra Z versus C existere; quinetiam puncti F in recta MO imaginem (puta φ) ultra FZ jacere. Similiter puncti G imago (γ) supra Y, ultràque GY sita est. unde conjectura fiet de totius imaginis φαγ positione, seu figura ad *ellipticam* accedente, qualis in apposita exhibetur figura; quæ certè (quanquam haud absque nimiâ molestiâ) juxta theoriam suprà constabilitam accuratè poterit delineari.

Fig. 201.

XI. Ità

XI. Ità rectarum linearum ad sphæricam superficiem ex inflectione quavis procreatas imagines qualitercunque liceat definire. unde de planarum quoque superficierum ad eandem repræsentationibus haud difficilè statuetur; harum scilicet imagines absolutæ *conoidum aut Sphæroidum Sup.rficies erunt* è rectarum imaginibus respectivis circa radiationum axes conversis progenitæ; quin & relatæ quoque planarum superficierum imagines è rectarum imaginibus relatis simili pacto progenerantur. rem totam ipsi mentem aliquantillum advertentes perspicietis; me λεπτολογίας extremæ fastidium capit.

XII. Restare videtur, ut quomodò compositæ superficies sphæricæ objectas repræsentant lineas dispiciamus. verùm cùm imagines indè prognatæ sint altioris gradûs lineæ, ab usu notitiàque communi segregatæ, atque proprietatibus intricatis præditæ; nil aliud quàm operam luderem iis desudans extricandis. illas itaque transiliam; hoc commonens unicum, punctorum in illis aliquot principalium positiones è præmonstratis dignosci, de cæteris commodiùs ex conjectura dijudicari.

XIII. Hæc sunt, quæ circa partem *Optica* præcipuè *Mathematicam* dicenda mihi suggessit meditatio. circa reliquas (quæ φυσικώτερα sunt, adeóqve sæpiusculè pro certis principiis plausibiles conjecturas venditare necessum habent) nihil ferè quicquam admodum verisimile succurrit, à pervulgatis (ab iis, inquam, quæ *Keplerus*, *Scheinerus*, *Cartesius*, & post illos alii tradiderunt) alienum aut diversum. atqui tacere malo, quàm toties oblatam cramben reponere. proinde receptui cano; nec ità tamen ut prorsus discedam, anteaquàm improbam quandam difficultatem (pro sinceritate quam & vobis & veritati debeo minimè dissimulandam) in medium protulero, quæ doctrinæ nostræ, hactenus inculcatæ, se objicit adversam, ab ea saltem nullam admittit solutionem. illa, breviter, talis est: *Lenti vel speculo cavo* EBF exponatur visibile punctum A, ità distans, ut radii ab A manantes ex inflectione versus axem AB cogantur; sitque radiationis limes (seu puncti A imago, qualem supra passim statuimus) punctum Z; inter hoc autem & inflectentis verticem B uspiam positus concipiatur oculus. quæri jam potest, ubi loci debeat punctum A apparere. retrorsum ad punctum Z videri natura non fert (cum omnis impressio sensum afficiens proveniat à partibus A) ac experientia reclamat. nostris autem è placitis consequi videtur ipsum, ad partes anticas

Fig. 202, 203.

ticas apparens, ab intervallo longissimè dissito, (quod & maximum sensibile quodvis intervallum quodammodò exsuperet) apparere. cùm enim quò radiis minùs divergentibus attingitur objectum, eò (seclusis utique prænotionibus, & præjudiciis) longiùs abesse sentiatur; & quod parallelos ad oculum radios projicit, remotissimè positum æstimetur; exigere ratio videtur, ut quod convergentibus radiis apprehenditur, adhuc magìs, si fieri posset, quoad apparentiam elongetur. quin & circa casum hunc generatim inquiri possit, quidnam omninò sit, quod apparentem puncti A locum determinet, faciatque quòd constanti ratione nunc propius, nunc remotius appareat; cui itidem dubio nihil quicquam ex hactenus dictorum *Analogia* responderi posse videtur, nisi debere punctum A perpetuò longissimè semotum videri. Verùm experientia secùs attestatur, illud pro diversâ oculi intèr puncta B, Z positione variè distans; nunquam ferè (si unquam) longinquius ipso A liberè spectato, subindè verò multo propinquius adparere; quinimò, quo oculum appellentes radii magìs convergunt eò speciem objecti propiùs accedere, nempe, si puncto B admoveatur *oculus*, suo (ad lentem) ferè nativo in loco conspicitur punctum A (vel æquè distans, ad *speculum*;) ad O reductus oculus ejusce speciem appropinquantem cernit; ad P adhuc vicinius ipsum existimat; ac ità sensim, donec alicubi tandem, velut ad Q, constituto oculo objectum summè propinquum apparens in meram confusionem incipiat evanescere. quæ sanè cuncta rationibus atque decretis nostris repugnare videntur, aut cum iis saltem parùm amicè conspirant. Neque nostram tantùm sententiam pulsat hoc experimentum; at ex æquo cæteras quas nôrim omnes; veterem imprimìs ac vulgatam, nostræ præ reliquis affinem ità convellere videtur, ut ejus vi coactus doctissimus *A. Tacquetus* isti principio (cui penè soli totam inædificaverat *Catoptricam* suam) ceu infido ac inconstanti renunciârit, adeoque suam ipse doctrinam labefactârit; id tamen, opinor, minimè facturus, si rem totam inspexisset penitiùs, atque difficultatis fundum attigisset. Apud me verò non ità pollet hæc, nec eoúsque præpollebit ulla difficultas, ut ab iis quæ manifestè rationi consentanea video, discedam; præsertim quum ut hîc accidit, ejusmodi difficultas in singularis cujuspiam casûs disparitate fundetur. nimirum in præsente casu peculiare quiddam, naturæ subtilitati involutum, delitescit, ægrè fortassis, nisi perfectiùs explorato videndi modo, detegendum. circa quod nil, fateor, hactenus excogitare potui, quod adblandiretur animo meo, nedum planè satisfaceret. Vobis itaque nodum hunc, utinam feliciore conatu, resolvendum committo. Ità demum, *Auditores Optimi*, *Valeatis*.

FINIS.

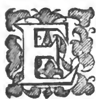
ERRATA.

P*Ag*.3.*lin*.25 luce.(præsente, *leg*.luce(præsente *p*4,*l* 21,desceptatur *l* disceptatur *ib*.*l* 31,valeat,id *l* valeat id *p* 5, *l* 31, toto *l* tota, *p* 6,*l* 23, dici *l* dicitur, *p* 11, *l* 10, allas *l* alias, *p* 13, *l* 27, proximo *l* proximos, *p* 14, *l* 12, contranimum *l* contranisum, *p* 14, *l* 16, effectant *l* affectant, *p* 15, *l* 14, nobile *l* mobile, *p* 16, *l* 20, in quæ *l* in iis quæ, *p* 17, *l* 3, substracto *l* substrato, *p* 17, *l* 5, citentur fig 10, *p* 17, *l* 20, fig 12 *l* fig 11, *p* 18, *l* 11, fig 13 *l* fig 12, *p* 19, *l* 17, transmitti *l* transmittit, *p* 22, *l* 21 πϱολεπτικῶς *l* πϱολη πτικῶς, *p* 23, *l* 6, incidentes (radios *l* incidentes radios, *p* 23, *l* 19, S B protracta *l* S B (protracta, *p* 28, ambages. I. Demonstratæ prostant *l* ambages demonstratæ prostant. I. Ut in *Parabola*, *p* 29, *l* 25, citentur fig 29, *p* 29, *l* 30, puncto divergentium tanquam *l* puncto divergentium radiorum reflexi rursus divergunt tanquam, *p* 29, *l* 32, suo *l* seu, *p* 32, *l* 10, fig 34, 35 deleatur, & citentur ad lineam 31, *p* 33, *l* 4, citentur fig 36, *ibid*. *l* 6, citentur fig 37 & 38, *p* 38, *l* 28, I q. R. A B. I *l* I q. R. & A B. T *p* 40, *l* 17, Sc *l* Si, *ib*. *l* 33, quoquam *l* quaquam, *p* 41, *l* 24, abeoque *l* adeoque, *p* 45, *l* 7, recissimi *l* rectissimi, *ib*. *l* 8, prepriores *l* propiores. *p* 47, *l* 24, resignare *l* designare, *p* 48, *l* 1, Z 2, *l* 2. *ib*. *l* 12, Nocetur si fuerit H N P *l* Notetu si fuerit H N π, *p* 57, *l* 4, ejusce *l* cujusce, *p* 65, *l* 4, existimari *l* existimare, *ib*. *l* 22, ipse *l* esse, *p* 67, *l* 13, interjaceret *l* interjacet, *p* 70, *l* 3, posteribus *l* posterioribus *p* 71, *l* 32, Adversatur *l* Advertatur, *p* 71, *l* 15, γ S γ v *l* γ S. γ v. *p* 78, *l* 1, in eodem *l* eodem, *p* 89, *l* 25. rattori *l* rariori, *p* 90, *l* 17, expansem *l* expensam, *p* 95, *l* 14, relect onibus *l* reflectionibus, *ib*. *l* 40, Sinus *l* Simus, *p* 96, *l* 3, fimplicime *l* simplicissime, *p* 97, *l* 8, quæsitam *l* quæsitum, *p* 105, *l* 28, Posito *l* Positio, *p* 112, *l* 26, admodum *l* ad modum,





BENEVOLO LECTORI.



Lectionibus his (quas jam quodammodò posthumas accipis) septem, unâ sepositâ, postremas Opticis *illis, quæ nuper editæ prostant, Comitis & quasi Mantissas destinâram; aliàs, opinor, de proferendis in apricum ejusmodi quisquiliis nihil cogitaturus. Sed cum nihilominùs è re sua fore censeret* Librarius *ab istis divulsas has seorsum comparere; quin & ad comparandum huic Opellæ speciem aliquam (ut ea nempe* rejectanei Schediasmatis *molem transcenderet) aliud quidpiam suppeditari cuperet; ejus (haud gravatìm non dixero) votis obsecundans, adjeci Lectiones priores quinque; subsequentibus illis materiâ agnatas, & quasi cohærentes; quas scilicet ante aliquot annos*

ut

ut nullo animo evulgandi, ità procul ab ea cura conceperam, quæ talem animum deceret; Enimverò crassiùs & ἐπιπολαιότερον scriptæ sunt, neque firmè quicquam continent, extra Tyronum, *quibus accommodatæ sunt, usum, captúmve jacens. quapropter harum rerum peritos obtestor, ut ab iis prorsus abstineant oculos, vel ut veniam saltem paullò liberaliùs indulgeant. alteras quas dixi septem conspectui tuo lubentiùs expono, nonnulla sperans in illis haberi, quæ nec eruditiores piguerit inspicere. Ultimam* amicus *(vir sanè cum primis probus, ast in hujusmodi negotiis* Flagitator improbus*) extorsit, aut certè, pro jure quod meritò obtinet suo, exegit. Cæterùm quid tractent, & quorsum tendant, facilè singularum initia delibans edoceberis; ut non sit cur te longiùs morer aut detineam.* Vale.

Lectio I.

NOvum jam ingredior dicendi campum, amæniorem sanè nescio vel feraciorem, uberrimâ varietate confertum, eóque delectabilem; & quia primas fermè *Mathematicarum hypothesium origines* recludit (è quibus nempe *magnitudinum cùm definitiones efformantur; tum proprietates emergunt*) necessariò perquam utilem. De magnitudinum intelligo generatione; seu. de modis, quibus ortæ productæve concipiantur variæ magnitudinum species. Nec ulla certè magnitudo datur, quæ non innumeris modis & intelligi producta possit, & reverà produci. Possunt autem, qui saltem hactenus usurpati sunt, ad præcipua quædam genera referri, quorum se mihi jam cogitanti suggerentia sunt hæc; *per motus locales; per intersectiones magnitudinum; per quantitate positionéque determinatas ab assignatis locis distantias; per ductus magnitudinum in magnitudines; & per applicationes magnitudinum ad magnitudines; per aggregationem magnitudinum ordine certo dispositarum; per appositionem magnitudinum ad alias, vel subductionem ab aliis; per organicam demum* (ab horum quocunque deductam, aut ordinatam) *effectionem*. Horum, & si qui sunt aliorum modus primarius, & quem alii cuncti quodammodo supponant oportet, utpote sine quo nil procreari potest, est iste, *qui per motum localem*. De quo proinde primo dispiciendum. De motu celebratur illud *Aristotelis* effatum, ἀναγκαῖον ἀγνοουμένης αὐτῆς (κινήσεως) ἀγνοεῖσθαι καὶ τὴν φύσιν: ignorato motu necessariò naturam ignorari; in Physicis ideò paginam utramque facit; nec immeritò, cùm in natura (saltem quantùm humanus intellectus assequi valet, aut experientia commonstrare) quicquid fiat, à motu fiat, aut certè non absque motu. De natura motûs igitur, & rectâ definitione; de causis, de differentiis complura subtiliter argutantur Physici, quorum ferè *Mathematicis nihil cordi* 3 *Phys. I.*

 vel

vel cura. Sufficere poteſt his quæ communis ſenſus agnoſcit, & obvia comprobant experimenta pro conceſſis arripere; hoc imprimis generale, Quamvis magnitudinem (magnitudinibus etiam punctum accenſebo ceu minimum magnum, ut & infinitum ceu maximum magnum, quibus mediæ interjacent magnitudines omnes finitæ) mobilem eſſe, hoc eſt eo quo conſpicimus indies fieri modo locum ſuum & ſitum poſſe demutare, juxta differentias præſtitutas, motu nempe vel directo, vel circulari; æquabiliter veloce, vel utcunque magis accelerato, vel magis retardato. Hujuſmodi dico motuum quemvis pro lubitu ſuo tanquam evidenter poſſibilem aſſumunt, ut quid exinde conſequatur inveſtigent & oſtendant. De iis igitur differentiis motuum quotæ ſint & quales diſſeremus. In motu potiſſimùm à *Mathematicis* conſiderantur *ipſe modus lationis, & quantitas vis motivæ*. ipſe modus primò lationis, juxta quem motus, alii progreſſivi ſunt, alii circumlatitii, alii compoſiti ex his; tum vis motivæ quantitas, propter quam alter alterius reſpectu velocior, tardior, æquè velox; aut in ſe æquabilis, acceleratus, retardatus affirmatur. Ex his manant fontibus differentiæ motuum; quorum de poſteriore nos primùm agemus, quia nonnulla continet ἐξωτερικὰ quæ velim quam primum ablegata, quo reliqua poſtmodùm expeditiùs fluant & limpidiùs. & quia vis motivæ quantitas ſine tempore dignoſci nequit, de temporis natura perſtringendum eſt aliquid. Tempus autem dic ſodes, quid eſt? illud *Auguſtini* tritiſſimum noſtis, ſi nemo quærat ſcio, ſi quis interroget neſcio. Verùm quia *Mathematici* crebrò tempus adhibent, quid eo deſignetur vocabulo diſtinctè concipiant oportet; agyrtæ ſecùs futuri. quare jure reſponſum exigatis; ac ſtatim pareo, ſed breviter ac ſimpliciter,& quantùm potero λεπτολογήματα defugiens. Abſtractè loquendo,tempus eſt perſeverantia rei cujuſque in ſuo eſſe. Alias verò res aliis diutiùs in eſſe ſuo permanere; fuiſſe cùm hæ non erant, eſſe cum hæ non ſunt; priùs incepiſſe,ſeriùs deſinere; neque non aliquas cum aliis unà oriri ac occidere, ſimultaneóq; quaſi durationis progreſſu, à carceribus ad metas, univerſum ætatis curriculum emetiri, nemini non perſpectum eſt. Ergò tempus abſolutè quantum eſt; ut quantitatis admittens (modo ſuo) præcipuas affectiones æqualitatem, inæqualitatem, proportionem; nec enim diffiteatur quiſquam, opinor, ἰσόχρονα fore, quæ ſimul exoriuntur & ſimul intereunt; inæqualiter duràſſe, quorum unum fuit antequam alterum cæperit eſſe, nec non eſſe perſeverat, poſtquam alterum deſiêrit exiſtere. Longius autem, & brevius tempus nemo non dicere ſolet, nemo non concipere videtur. Quantitatis igitur particeps eſſe tempus communis ſenſus agnoſcit,

pro

pro modo permanentiæ rerum in suo esse. At enim dices: ante res omnes conditas annon tempus fuit? extra mundum, ubi nihil manet, annon tempus labitur? respondeo, sicut ante conditum mundum fuit spatium, & extra mundum nunc est & quidem infinitum cui Deus coëxistit) quatenus potuerunt olim, & possunt jam existere talia tantáque corpora, quæ tum non fuerunt, aut jam non sunt; ità priùs mundo, & simul cum mundo (licèt extra mundum) tempus fuit, & est, quatenus ante mundum exortum potuerunt aliquæ res in esse tamdiu permanere, possint jam extra mundum talis permanentiæ capaces res existere; potuit *Sol* multo priùs in lucem emersisse; possit jam ille, vel alius talis spatiis imaginariis affulgere. Tempus igitur non actualem existentiam, at capacitatem tantùm seu possibilitatem denotat permanentis existentiæ; sicut spatium capacitatem designat magnitudinis intercedentis. Sed mirum, ingeres, secluso motu tempus explicari; annon tempus motum implicat? Minimé dico quoad absolutam, & intrinsecam naturam suam; haud magìs quàm quietem; à neutro temporis quantitas in se dependet; seu currant res, seu stent; seu dormiamus nos, sive vigilemus æquo tenore tempus labitur. Finge stellas omnes ab incunabulis suis fixas perstitisse; nihil indè quicquam tempori decessisset; tamdiu quies ista perduràsset, quamdiu motus hic effluxit. Prius, posterius, simul (quoad ortus rerum & interitus) etiam in illo tranquillo statu fuisset in se, potuisset à mente magìs perfecta apprehendi. Sed prout ipsæ magnitudines sunt absolutè quantæ, independenter ab omni mensuræ respectu, etsi nos ipsarum quantitatès nisi mensuras applicando percipere nequeamus; ità per se tempus quantum est, etsi quo temporis quantitas a nobis dignoscatur, advocandum sit motûs subsidium, ceu mensuræ quâ temporùm quantitates æstimemus, & inter se conferamus; adeóque tempus ut mensurabile motum connotat, nec enim, si res omnes immotæ perstarent, ullo pacto quantum effluxisset temporis possemus internoscere; rerum ætas indiscreta nobis, & imperceptibilis cederet. Temporis fluxum non perciperemus dico? Imo nec aliud quippiam, at stupore continuo defixi ceu stipites consisteremus aut saxa. Nihil enim animadvertimus nisi quatenus aliqua mutatio sensum afficiens nos interpellat, aut interna mentis operatio nostram conscientiam lacessit, ac excitat. Ex motûs forinsecùs impellentis, aut intra nos tumultuantis extensione, vel intensione diversos rerum gradus & quantitates æstimamus. Ità motûs quantitas, in quantum à nobis observari potest, à motûs extensione dependet;

Nec per se quenquam tempus sentire fatendum est
Semotum ab rerum motu placidáque quiete;

Haud malè dixit *Lucretius*. & *Philosophus ipse*; Ὅταν γὰρ αὐτοὶ μηδὲν
Phys. IV. 16. μεταβάλλωμεν τὴν διάνοιαν, ἢ λάθωμεν μεταβάλλοντες, οὐ δοκεῖ ἡμῖν γεγονέναι χρόνος. Rectè quidem hoc, non videtur nobis, non apparet à somno excitatis quantum temporis intercessit; at non hinc rectè colligitur, φανερὸν ὅτι οὐκ ἔστιν ἄνευ κινήσεως καὶ μεταβολῆς ὁ χρόνος. Non persentiscimus, ergò non est, illatio fallax, & fallax somnus, qui fecit ut nos duo semota temporis instantia connecteremus. interim verissimum illud; ὅση ἡ κίνησις, τοσοῦτος καὶ ὁ χρόνος ἀεὶ δοκεῖ γεγονέναι, quantus nempe motus fuit, tantum tempus videtur extitisse; neque quum tantum tempus dicimus, aliud consuevimus intelligere, quàm tantum motum intercedere potuisse, cujus scilicet extensioni continuò successivæ rerum permanentiam imaginamur coëxtendi. Cæterùm quia tempus alveo semper æquali, non per vices nunc segniùs, tunc rapidiùs præterlabi concipimus (admissâ siquidem illâ disparitate nullam omninò computationem, aut dimensionem admitteret) non ideò motus omnis æquè determinandæ dignoscendæque temporis quantitati censeatur accommodatus, at is præsertim qui summè simplex & uniformis æquabili semper tenore progreditur; mobili parem ubique vim retinente, pérque medium uniforme delato. Quare tempori determinando tale quiddam mobile deligendum est, quod saltem quoad motûs sui periodos æqualem constanter impetum servat; & per æquale spatium decurrit. Et ad communem quidem usum accipiendus est ejusmodi motus præcipuè notabilis, in promptu cunctis obvius, & sensus omnium incurrens, qualis est motus syderum, imprimìs *Solis & Lunæ*, mirificè sibi per omnia constans, & orbi terrarum conspicuus; qui proinde nedum communi gentis humanæ suffragio deputatus, at divino Creatoris consilio aptus natus est huic usui; à quo nempe pronunciatum legimus: *Fiant luminaria in firmamento Cæli, & dividant diem ac noctem, & sint in signa, & tempora, & dies, &*
Gen. 1. 14. *annos.* At quomodò, dices, cognoscetur *æquabili solem motu ferri, & unum puta diem, aut annum alteri penitus exæquari, vel æquitemporaneum esse?* Respondeo non aliter hoc (excipiendo quòd à divino testimonio colligatur) nobis innotescere, quàm cum aliis æqualibus motibus ipsum solis motum contendendo. Si nempe deprehendatur solis motus in horologio solari (quod spatiorum à sole in circulis æquatori parallelis percursorum penè certò ac exquisitè quantitates indicat)

indicat) cùm organi cujusvis horodeictici, satis accuratè constructi, motibus consentire. Talis enim machina è fabrica sua comparata est, secundum motûs sui repetitiones succedaneas, æqualiter moveri; *Clepsydram* puta dimetiendæ diei, vel horæ destinatam; & quoniam in hac aqua, vel arena quoad quantitatem suam, & figuram, vimque descendendi prorsus eadem manet; nec non vasculum continens, & meatus ipsam transmittens haud omnino variantur, tantillo saltem tempore, perque temperiem aëris consimilem, nec ideo causa subest ulla, cur non æquales in singulis effluxibus motus obire concedatur; ergò si compertum sit, Solares motus, seu quoad integras periodos, seu quoad partes ipsarum proportionales, organi talis repetitis motibus exquisitè congruere, meritò pronunciandum est, eos prorsus æquabiles, & uniformes fore. Ex quo discursu liquere videtur, id quod fortè non nemini mirum videatur, cælestia corpora non esse, ex parte rei propriéque loquendo, primarias & originales temporis mensuras; ast illos potiùs motus, qui prope nos sensibus obversantur, & experimentis subjacent nostris, cùm horum ope cælestium motuum regularitatem dijudicemus. Nè quidem ipse Sol temporis idoneus judex, aut testis αὐτόπτης est, nisi quatenus horariæ machinæ suffragio veracitatem suam adtestatur. Nec sanè, quod obiter interpono, potest ullo pacto sciri num periodi syderum ante multa secula transcursæ nostri seculi revolutionibus omnino pares fuerint; nemo scilicet asserat certò *Methuselam* illum qui tantùm non mille vitæ transegit annos, eo fuisse revera μακροβιώτερον, qui jam ante centum annos fato cedit. Quid enim, si Sol tum junior, eóque vegetior decuplo citiùs periodos suas evolverat? Quid si tum aër purior, & indè corporum gravitas validior effecerat, ut vel ipsa organa mechanica citatiores acciperent motus, adeóque cum nostri temporis instrumentis comparata fidem suam fallerent? *Empedocles* quidem, apud *Plutarchum*, existimâsse dicitur Solem initio dies longè prolixiores effecisse. Sed minùs id rationi consentaneum videtur, quia tales motus vertiginosi sensim elanguescere potiùs solent, quàm invalescere. Verum obiter hæc, & vix seriò; revertamur in orbitam. Temporis (seu permanentiæ rerum in suo esse, statu, motúve) quantitas, ut dictum est, à motu quolibet dignoscitur, bene notorio, æquabili, (seu quoad partes ad hoc adhibitas sibi constanter æquali ac simili) dein secundariò è quibusvis aliis motibus, qui cum illo comparati proportione correspondent, è cælestibus imprimìs, Solis potissimùm ac Lunæ. Adeò ut æqualia tempora sint, in quibus eadem clepsydra semel ac iterum, vel æquè multis vicibus exhauritur; aut in quibus

eadem

eadem sydera periodos easdem, aut ejusdem periodi partes æquales absolvunt; inæqualia verò juxta quamcunque proportionem, in quibus similiter, seu proportionaliter inæquales periodi consumuntur. Neque quisquam objiciat tempus communiter haberi pro mensura motûs, & consequenter ad hoc motûs differentias (velocioris, tardioris, accelerati, retardati) adsumendo tempus ut præcognitum definiri; nec ideò temporis quantitatem è motu, sed motûs quantitatem à tempore determinari; nil enim obstat quo minus tempus & motus hæc sibi mutuò præstent officia. Sanè veluti spatium ex aliqua primùm magnitudine metimur, & quantum sit discimus, è spatio posteà reliquas ei congruas magnitudines æstimanus; ita tempus primò taxamus è motu quodam, posteà motus reliquos ex eo dijudicamus; quod planè nihil est aliud quàm mediante tempore motus alios cum aliis comparare; sicut & mediante spatio magnitudinum inter se rationes investigamus. Qui nimirum è temporum proportione motuum colligit proportionem, nil aliud quam ex organorum horologicorum, vel ex Solarium motuum simul decursorum proportione dictam elicit motuum rationem. Quod certè vidit, & exertè docuit *Aristoteles*: οὐ μόνον (inquit) τὴν κίνησιν τῷ χρόνῳ μετροῦμεν, ἀλλὰ
Phys. IV. 18. καὶ τῇ κινήσει τὸν χρόνον διὰ τὸ ὁρίζεσθαι ὑπ' ἀλλήλων. Porrò, quia tempus, ut ostensum, est quantum uniformiter extensum, cujus omnes partes æquabilis motûs partibus respectivis, seu spatiorum æquabili motu peractorum partibus proportione respondent, possit id quàm optimè per magnitudinem quamlibet ὁμοιομερῆ repræsentari, hoc est menti nostræ seu phantasiæ proponi; per simplicissimas præsertim, quales sunt linea recta, & circularis; quibuscum etiam & tempore similitudines & analogiæ non paucæ intercedunt. Præterquam enim quòd tempus partes habet omnino similares, rationi consentaneum est ipsum velut unicâ dimensione præditum quantum considerare; ipsum enim velut ex simplici supervenientium momentorum additamento, vel ex unius momenti quasi continuo fluxu constitutum imaginamur, & solam proinde longitudinem ei solemus attribuere; nec ejus quantitatem aliàs quàm ex lineæ decursæ longitudine determinamus. Sicut, inquam, linea puncti promoti censetur vestigium, à puncto habens quòd aliquatenus divisibilis sit, à motu verò quòd uno modo, secundum longitudinem, dividi possit; ità tempus velut instantis continuò labentis vestigium concipiatur, ab instante nonnullam indivisibilitatem habens, à successivo fluxu quòd eatenus dispertiri queat. Et sicuti lineæ quantitas ab unica longitudine pendet motum consequente, ità temporis quantitas ab unica consectatur velut in longum expor-

exporrecta successione; quam spatii decursi longitudo demonstrat, ac determinat. Tempus itaque per rectam lineam semper designabimus; arbitrariè quidem initio sumptam & expositam, at cujus partes proportionalibus temporis partibus, & puncta temporis instantibus respectivis justè respondebunt, & iis apposite repræsentandis inservient. His de tempore prælibatis ad considerandam vim motûs effectivam procedimus, quæ sanè (quæcunque sit ejus natura, vel undicunque procedat, nam ista *Physicis* disquirenda relinquimus) merito quoque seu quantum quid concipitur, & sicut alia quanta computo subjicitur. Etenim experientiâ compertissimum est, sæpe duorum mobilium ab eodem termino per eandem orbitam delatorum alterum alteri prævertere, seu majus eodem tempore spatium conficere. Nec aliunde potest hoc procedere, quàm à majori vi, seu potentia motiva, quâ præcellit alterum mobile, cujúsque gratiâ velocius dicitur. Et quia perspicuum est nil impedire, quin secundum omnimodas proportiones contingat hic spatiorum unà peractorum excessus, ideo vis hæc jure concipiatur in partes quaslibet (quas & sicuti partes cujuscunque qualitatis intensivas succinctæ distinctionis ergò gradus appellare licet, & consuetum est) in partes, inquam, quaslibet infinitas, aut indefinitas divisibilis concipiatur; quas inter se nectens, & à se dirimens communis terminus, vel (juxta suppositionem quòd quanta constant ex infinitis atomis) pars absolutè minima dicatur quies, hoc est summa tarditas, aut infima velocitas; è cujus succrescentia, vel intensione continua velocitatis gradus quilibet eo modo concipiatur aggregari, vel produci, quo linea è punctorum appositione, vel motu, tempus ex instantium successione vel fluxu progenitum imaginamur. Unde rem absolutè considerando, quo vis hujusce quantitas menti seu phantasiæ rectè proponatur, sufficit ejus vice magnitudinem quamvis regularem exhibere (hoc est talem, in cujus partibus quamvis differentiam, quamlibétque proportionem clarè promptéque valeamus apprehendere) simplicitatis adeò perspicuitatisque causâ cuilibet ejus repræsentando gradui recta linea cum primis accuratè quadrat. Ità quidem in se generatim & absoluta spectata vis ista tempus non implicat, eóque secluso concipi potest (in quolibet enim temporis instanti, pérque quodcunque temporis intervallum eâ præditum mobile concipiatur) at quatenus computabilis, ac æstimio Mathematico subdita, quâ ratione velocitas dicitur, cum spatio tempus adsignificat; è quibus nempe quantitas ejus dijudicatur, ac discernitur definitur idcircò velocitas potentia, quâ mobile spatium aliquod in aliquo tempore pertransire potest. Unde consectatur singularem

gularem velocitatis cujuſpiam quantitatem nec ex ſola confecti ſpatii,nec ex abſumpti temporis quantitate dignoſci poſſe(qualibet enim velocitas aliquo tempore quodvis aſſignatum ſpatium emetiatur) aſt ex ſpatii ſimul ac temporis quantitatibus ad calculum redactis eam innoteſcere; ſicut & viciſſim temporis abſumpti quantitas non niſi ſpatii ſimul ac velocitatis agnitis quantitatibus determinetur. Quinimò ſpatii quoque quantitas (quatenus hoc modo per motum dignoſcibilis eſt) nec è ſola definitæ velocitatis quantitate, nec ab aſſignato tanto tempore dependet, aſt ab utriuſque ratione conjuncta. Et quidem ut hæc quomodo ſe reſpiciant ampliùs exponamus, ſpatii quatenus hoc modo computatur quantitas eo ferè dignoſcitur modo, quo è dimenſionibus ſuis quanta ſit ſuperficies innoteſcit; è quantitate ſcilicet unius lineæ, (quæ longitudinem ejus aut altitudinem oſtentat) & è quantitatibus ſingularum invicem ſibi parallelarum linearum, quæ per iſtius lineæ puncta quæque tranſeuntes ſuperficiem totam quodammodo conſtituunt, & componunt; eam ſaltem limitant atque determinant; hoc eſt quaſi per ductum ſingularum ejuſmodi linearum in reſpectiva dictæ lineæ puncta. Velocitatis autem, & temporis quantitates pariter eo modo diſcernuntur, quo ex ſuperficiei, & unius cui applicatur dimenſionis quantitate diſcernitur quanta ſit reliqua dimenſio (ubivis, inquam, aut ſaltem alicubi quanta, nam fieri poteſt ut reliqua dimenſio quatenus per omnia prioris dimenſionis puncta diffunditur, ſibi paſſim diſpar & difformis ſit; quid velim è veſtigio conſtabit, nam utilis hæc conſideratio poſtulat enucleatiùs declarari. Omni temporis inſtanti, ſeu indefinitè parvæ temporis particulæ (inſtanti dico, vel indefinitæ particulæ, nam uti nihil admodum refert, utrùm lineam ex innumeris punctis, an ex indefinitè parvis lineolis compoſitam intelligamus, ità perinde eſt, utrùm tempus ex inſtantibus, an ex innumeris minutis tempuſculis conflatum ſupponamus; nos ſaltem brevitati conſulentes pro temporibus quantumlibet exiguis inſtantia, hoc eſt pro tempuſcula repræſentantibus lineolis puncta non verebimur uſurpare) cuilibet dico temporis momento competit velocitatis aliquis gradus, quem mobile tunc habere concipiendum eſt; cui gradui reſpondet aliqua decurſi ſpatii longitudo (nam hìc mobile tanquam punctum, & ſpatium proinde tantummodò ceu longum conſideramus) quia verò temporis momenta quoad rem ipſam neutiquam à ſe dependent, ſupponi poterit in proximo inſtanti mobile gradum velocitatis alium (alium inquam vel æqualem priori, vel in quavis proportione diverſum) admittere, cui proinde reſpondebit alia ſpatii longitudo, tali proportione reſpiciens priorem, quali velo-

velocitatis hic gradus præcedentem. Quum enim temporis instantia prorsus æqualia sint inter se, spatialium longitudinum ratio à sola velocitatem ratione dependebit, eique proinde par erit, aut similis (quod nisi pro verissimo sumatur, haud ullo modo mensurari possit velocitas; nam à sola spatiorum eodem tempore decursorum (vel eodem instanti) proportione velocitatum inter se collatarum immediatè vel mediatè ratio taxatur, & altera alterius respectu denominatur tanta) similiter si per omnia temporis cujusvis momenta qui conveniunt ipsis velocitatis gradus assignentur, aggregabitur ex iis quantum quiddam, cujus partibus quibusvis decursorum spatiorum partes respectivæ, hoc est iisdem temporibus respondentes particulæ, justè proportionantur, adeoque quantum è gradibus istis constans repræsentans magnitudo spatium quoque decursum repræsentare possit, quatenus nempe qualem spatii partes temporibus singulis peractæ proportionem inter se servant, exactè referat. Quum igitur, utpote quàm æquabilissimè fluens per lineam, ut præmonuimus, rectam aptissimè repræsentetur, & qui in singulis temporis instantibus habentur alii ac alii, sibimet æquales; aut inæquales, velocitatis gradus per lineas itidem, ut prius etiam insinuatum est, rectas exprimantur; & cùm hi velocitatis gradus singula temporis momenta alii ac alii permeent, independenter à se invicem ac impermixtè; itaque si per lineæ tempus repræsentantis omnia puncta trajiciantur rectæ sic dispositæ, ut altera nulla nulli alteri coincidat, hoc est in situ parallelo; quæ resultat hinc superficies plana (pro quantitate temporis, & positorum velocitatis graduum ratione determinata) graduum velocitatis aggregatum exactissimè referet; cujus superficiei partes cùm respectivis (ut prædictum) spatii peracti partibus proportionales sint, poterit id spatio quoque repræsentando commodissimè adaptari. Ista verò superficies brevitatis causâ dehinc appellabitur velocitas aggregata, vel spatii repræsentativa. Neque quenquam afficiat, nam submovenda nobis hæc remora, quod diximus in singulis temporis instantibus longitudinem aliquam confici, quasi dari posse motum instantaneum affirmarem. Nam posito tempora è momentis componi, etiam lineæ componentur è punctis; quòd si lineæ inæquales componantur è punctis infinitis, sibimet æquinumeris, necessariò sequitur linearum puncta, juxta similem cum ipsis proportionem inæqualia fore, adeòque per longitudines in æquitemporaneis momentis decursas duntaxat intelligenda sunt ejusmodi inæqualia puncta, è quibus tota decursa longitudo quasi conflatur. Sin hoc absonum cuipiam videatur, & nullo sensu motus admittatur in-

 stantaneus,

ſtantaneus, eò recurrendum ut per inſtantias nil aliud, quàm indefinitas temporis particulas intelligamus; quibus reſpondeant certo velocitatis gradu, alio atque alio, percurſa indefinitè minuta ſpatiola velocitatis gradibus adproportionata; tum autem repræſentando ſingulo cuipiam velocitatis gradui per tempuſculum aliquod retento, loco lineæ rectæ ſubſtituatur oportet exiguum rectangulum dicto tempuſculo applicatum. Perinde fuerit, ac eodem recidet hoc an illo modo ſe res habeat, aſt ſimplicior & clarior videtur iſte modus, quem prius expoſuimus, cui proinde poſthac inſiſtemus. Ut redeam, & recolligam; ſicuti per omnia lineæ rectæ puncta traduci poſſunt parallelæ rectæ, magnitudine pro lubitu pares, vel impares, è quibus aggregatis ſuperficiale planum exurgat, ità ad ſingula temporis inſtantia applicari poſſunt velocitatis gradus diverſi, pares vel impares, prout mobile per totam ſuam lationem vel eundem impetum retinere, vel aliquando varium adſciſſere ſupponatur, utcunque creſcendo vel decreſcendo. Si velocitatem ſemper eandem conſervare dicatur, facilè patet è dictis velocitatem aggregatam definito cuivis tempori convenientem rectiſſimè per figuram parallelogrammam exprimi, qualis eſt AZZE, in qua latus AE temporis definiti vicem obit, reliquum AZ, eique parallelæ rectæ omnes BZ, CZ, DZ, EZ velocitatis gradus ſingulos per ſingula temporis momenta penetrantes, in hoc ſcilicet caſu pares, exhibent. Poſſunt etiam, ut dictum, parallelogramma AZZB, AZZC, AZZD, AZZE ſpatia reſpectivis temporibus AB, AC, AD, AE decurſa appoſitè deſignare. (Fig. 1.) E qua conſideratione ſola, vel intuitu primo motûs hujuſmodi, quem æquabilem, & uniformem vocitant, omnia ſymptomata deduci poſſunt. Quales ſunt: quòd æquali perpetuò velocitate tranſmiſſa ſpatia ſeſe habent ut tempora: Quòd æquali tempore peracta ſpatia ſeſe habent ut velocitates, & viciſſim: Si ſpatia ſunt ut velocitates tempora fore æqualia; ſi ut tempora; velocitates æquari. Et ſi æqualia ſpatia fuerint, tempora velocitatibus proportione reciprocari; contràque, ſi tempora velocitatibus proportione reciprocentur, ſpatia ſibimet exæquari. Spatia denique quælibet compoſitam habere rationem è rationibus velocitatum & temporum; nec non, ſubducendo rationem temporum è ratione ſpatiorum reſiduam manere rationem velocitatum; vel ſubducendo rationem velocitatum relinqui rationem temporum. Hæc enim parallelogrammorum inter ſe comparatorum affectiones ſunt (æquiangulorum intelligo parallelogrammorum, nam ubi repræſentativa, hæc parallelogramma conferuntur inter ſe, æquiangula conſtituantur oportet; alioqui cùm ſin-

ſingillatim ſpectantur; nihil refert quinam angulus ſtatuatur) hæc, inquam, è parallelogrammorum natura liquent, & ex iis quæ poſuimus ſponte conſectantur; ut nullam aliam demonſtrationem requirere videantur. Et ſanè quoad omnes Mathematicæ ἀφῇ ſubditas (hoc eſt utcunque quantitatem involventes) materias cùm magnâ facilitate Theoremata perſpicere, tum ſummo eadem compendio demonſtrare poterit, quiſquis contemplationi ſuæ ſubjecta cujuſcunque generis quanta ad analogicas magnitudines ritè congruéque novit redigere. Quòd ſi porrò velocitatis gradus continuò per ſingula temporis inſtantia ſupponantur æqualiter adaugeri, vel imminui, à gradu minimo, ſeu quiete, definitum ad velocitatis gradum, vel à definito tali gradu ad quietem; conſimili pacto poterit aggregata velocitas per quamvis ſuperficiem æqualiter à puncto creſcentem ad definitam magnitudine lineam; vel eodem retrogradè paſſu decreſcentem, exhiberi; ſimpliciſſimè verò, & optimè per triangulum rectilineum; ut puta per triangulum A E Y, in quo crus A E tempus denotat; ejúſque punctis applicatæ lineæ parallelæ B Y, C Y, D Y, E Y gradus velocitatis ſingulis inſtantibus congruos à puncto A (quod quietem, vel infimam velocitatem refert) ad definitum gradum lineâ maximâ E Y repræſentatum æqualiter increſcentes; vel ab eadem E Y retrò ad punctum A quietis repræſentativum declinantes. Sed & pari jure, quo priùs, trigona A B Y, A C Y, A D Y, A E Y per reſpectiva ab initio tempora decurſis ſpatiis repræſentandis inſervient. Et conſequenter, ſi velocitas æqualiter à definito gradu ad gradum definitum ſupponatur augeri, vel diminui, repræſentabitur tam aggregata velocitas, quàm ſpatium ei reſpondens à figura quadrangula Trapezia, qualis eſt C Y Y E, in figura priùs adhibita. Hinc, non ſecùs quàm in præcedentibus, hujuſmodi motûs quem uniformiter acceleratum nomine perquam apto *Galilæus* nuncupavit) affectiones omnes præcipuæ facillimè deprehendentur, atque demonſtrabuntur; cujuſmodi ſunt: Quòd æquali tempore conficietur æquale ſpatium per motum à quiete uniformiter acceleratum, ac per ipſum motum uniformem, modò velocitas hujus ſubdupla ſit velocitatis, quam ille maximam habet. Quòd ſpatia motu à quiete uniformiter accelerato peracta, ſeſe habent ut *Quadrata temporum* (vel in duplicata temporum proportione.) Et diverſos hoc modo acceleratos motus comparando: Quòd ab illis tranſacta ſpatia habeant rationem è rationibus temporum, & velocitatum maximarum: Et ſimilia talia vel his connexa, vel indè conſequentia, quæ triangulis conveniunt inter ſe quoad ſuas, & quoad laterum rationes comparatis; quæ ex poſitis haud difficilè perſpiciantur, ac demonſtrentur. Fig. 1.

strentur. Porrò, non absimiliter si velocitatis gradus continuâ per singula temporis instantia successione, à quiete ad definitum gradum, vel retrogradè, crescere concipiantur, aut decrescere juxta progressionem numerorum quadraticorum repræsentatur tum optimè velocitas aggregata, sicut & spatium hujusmodi motu confectum, à complemento Semiparabolæ, qualis est A E X, cujus vertex A quietem (seu motûs ac temporis initium) tangens A E tempus definitum, linea B X primum velocitatis accrescentis gradum (qui se habet ut 1.) proxima C X secundum gradum (habentem se ut 4.) subsequens D X (qui se habet ut 9.) & ità porrò usque ad ultimum E X: Id quod ex notissima parabolæ proprietate manifestum est. Eodem planè modo quivis suppositi velocitatis gradus, utcunque crescentis aut decrescentis, continuò vel interruptè, quovis, inquam, imaginabili modo per lineas rectas ad temporis repræsentatricem rectam applicatas certissimo, commodissimòque modo designari possunt, asservatâ quam quis adsignare voluerit proportione; sic ut inde cognitâ spatii repræsentantis dimensione, spatii per motum confecti quantitas faciliùs innotescat; & reciprocè, cognitâ spatii dicti naturâ velocitatis ac temporis quantitatibus dignoscendis aliqua lux affulgeat: Quæ quidem posthac dicendorum intellectui necessaria, totique motuum theoriæ non parùm ut videtur utilia visum est paullo fusiùs exposita præmittere. Quà perfunctus operâ pedem figo.

Fig. 2.

LECT.

LECT. II.

VArios, quibus productæ concipiantur magnitudines aggressi modos considerare, primum & præcipuum attingere cæpimus illum, qui motu peragitur locali. Cùm vero soleant *Mathematici* diversimodos, è quibus aliæ ac aliæ magnitudines resultant, motus adsumere ceu possibiles, duos ad fontes digitum intendimus, è quibus istæ motuum differentiæ scaturiunt, modum lationis ipsum, & quantitatem vis motivæ; quorum posteriorem haud ita clarum & apertum nuperrimè conati sumus recludere, limpidúmque reddere. Jam differentias quas assumunt ipsas prosequemur, & quo pacto generationi magnitudinum inservire possunt ostendemus. Lationis modum spectando generantur magnitudines vel per motus simplices, vel per motus compositos, vel ex concursu motuum (nam compositionem à concursu distinguo, quæ tamen à nonnullis confunduntur.) De simplicium motuum hypothesibus, ac effectis primò videamus. Simplicium motuum duo genera sunt, φορὰ, & περιφορὰ, progressio, & circumlatio. Sub progressivo motu comprehenditur motus omnis, qui nullum fixum locum (loci nomine quamvis magnitudinem, etiam punctum adnumerans, intelligo,) respicit, cui velut innectitur, ac affigitur; seu directus iste motus sit, seu reflexus, seu refractus; sive callem certum persequatur, sive inconstanter desultet, divagetur, exorbitet. Quia vero penitus irregularium in arte nulla ratio potest haberi, sufficit *Mathematicis* supponere magnitudinem quamcunque progredi posse juxta designatam quamlibet orbitam; ut *v. g.* Quòd punctum *in linea recta, circulari, elliptica, spirali, vel alia quavis præstituta queat incedere.* Verùm præcipuæ, hoc est maximi, frequentissimique pro magnitudinibus efformandis usûs, circa hujusmodi motus quas *Mathematici* præstruunt hypotheses, sunt hæ: Quòd punctum à præfixo termino in linea recta quousque libuerit adsignare directè progredi queat, quali motu perspicuum est lineam rectam describi:

describi: Quòd linea recta per alterius cujusvis lineæ longitudinem ità procedere possit, ut situm interea parallelum perpetuo servet (hoc est ut ipsa juxta positionem, quam in quolibet temporis momento sortitur, parallela sit sibi secundum positionem suam in alio quovis temporis momento:) Item, quod linea quævis (definitè vel indefinitè protensa, quod in omnibus intelligendum) motu directo, itidem sibi parallelo, progredi possit (directo inquam, hoc est ut ejus singula puncta lineas rectas describant) qui sanè duo motus sibimet æquivalent, eundémque procreant effectum eorúmque alterutro productæ concipiantur illæ, quæ præ cæteris æquabiles, ac uniformes haberi merentur superficies; quales sunt in plano *Superficies parallelogrammæ* (seu penitus rectilineæ, sive mixtæ) in Solido (ut ita dicam, vel non in uno plano delineatæ) *Superficies Prismatica, Cylindricaque*, tum
Fig. 3. quæ stricto, tum quæ latiori significatu dicuntur. Sit in exemplum primò recta linea B C, cui insistens recta A B per ipsam B C feratur, sibi continuò parallela, donec puncto B ad C promoto recta A B ipsi D C ad A B parallelæ congruat. Manifestum est hujusmodi motu procreari *figuram planam parallelogrammam* A B C D. Patet etiam quodlibet assumptum in A B punctum, ut E, rectam lineam describere, cujus partes E E rectis A B interceptæ, rectæ B C partibus B B, per easdem respectivè rectas A B interceptis (hoc est eodem tempore à puncto B decursis) æquantur. Neque minùs patet, si vice versâ recta B C per ipsam B A feratur, eandem superficiem de-
Fig. 4. lineari; omniáque rectæ B C puncta (ceu F) rectas lineas effingere; nec non harum partes F F parallelis B C interceptas respectivis lineæ A B partibus B B adæquari. (Notetur autem abhinc brevitatis ergò tam in his, quàm in similibus casibus harum linearum illam, quæ motu suo magnitudinem describit à me *Genetricem* dici; alteram autem, juxta quam, vel cui insistens, prior defertur, *Directricem* appellari; quia motæ lineæ processus ab ea dirigitur, vel ad eam accom-
Fig. 5. modatur.) Sit rursus linea quæpiam curva (velut arcus circularis) B C, cui in eodem plano insistat linea recta A B; & per curvam B C continuò deferatur recta A B, sibimet æquidistans, donec punctum B ad C pertigerit, & recta A B demum rectæ D C ad ipsam A B primò positam parallelæ congruerit; describetur hoc motu figura quoque plano (latiore significatu) parallelogramma; quia scilicet adversa hujus figuræ latera sibi parallela sunt, recta A B rectæ D C, & curva A D curvæ B C. Nam & hic singula quæque *Genetricis* rectæ puncta (velut E) lineas describent *directrici* B C similes & æquales; cùm integras, tum iisdem parallelis A B interceptas partes; si enim duo puncta

puncta quævis E E rectâ lineâ connectantur, iisque respondentia puncta B B rectâ quoque jungantur; quoniam rectæ E B sibimet æquantur (etenim nil aliud sunt, quam eadem ipsa linea diversum situm obtinens) ac parallelæ secundum *hypothesin*, erunt rectæ E E, B B æquales ac parallelæ. Unde patet curvas E E, B B adæquari sibimet, & assimilari. Adæquari quia subtensæ omnes E E subtensis B B singillatim æquantur; assimilari, quia rectæ A B cum subtensis adjacentibus respectivis E E, & B B pares angulos constituunt, adeóque rectæ ipsæ E E pares iis, quos rectæ B B; ipsæ illæ cum seipsis, & hæ cum seipsis (nam in hujusmodi proportionalitate partium, & angulorum æqualitate, sicut alibi fortasse luculentiùs & fusiùs disseremus, omnis consistit linearum, & quarumcunque magnitudinum similitudo.) Quòd si vice commutatâ linea curva B C fiat linea *Genetrix*, & recta B A *directrix*, hoc est si B C per B A sibi parallela feratur, producetur eadem ipsissima parallelogramma Superficies; & singula rectæ B C puncta, veluti F, rectas lineas ad B A parallelas describent; neque non interceptæ F F respectivis B B pares erunt; quod & pari modo ex supposito perpetuo curvæ BC parallelismo facilè consectatur. Sit denique curva quævis (vel è rectis angulos efficientibus composita; quæ curvæ quoque nomen meritò ferat; *Archimedes* saltem è rectis compositas lineas, uti figurarum circulis inscriptarum aut adscriptarum perimetros, καμπυλῶν γραμμῶν nomine complectitur; ut & vicissim curvæ quævis lineæ censeri possunt è rectis, innumeris quidem illis indefinitè parvis, adjacentibus, & deinceps secum angulos efficientibus, conflatæ) sit, inquam, talis aliqua curva B C, in plano quovis constituta, tum in alio plano, vel super lineæ B C planum ut libet elevata, recta A B sibi continuò feratur parallela, modo quo semel ac iterum ostendimus; describetur hujusmodi motu *Superficies cylindrica* (vel certè *prismatica*, si *linea directrix* è rectis ponatur composita) & *cylindrica* quidem strictè dicta, si *directrix fuerit linea circularis*, *aut elliptica*; latiore verò sensu talis, si curva fuerit alterius generis ut *parabolica* puta, vel *hyperbolica*, vel alia quæpiam. In hoc autem motu lineæ quoque genetricis singula puncta similes & æquales describunt curvæ directrici lineas; æquales (ut in mox præcedente discursu) quoniam E B pares ac parallelæ sunt; adeóque E E, B B quoque pares, ac parallelæ; similes; *quoniam etiam anguli E E E, angulis B B B æquantur. Quinetiam reciprocè describatur eadem Superficies ponendo curvam B C per rectam A B parallelas deportari. Quomodo singula quoque curvæ B C puncta rectas parallelas & pares interceptis respectivis

rectæ

Fig. 5.

Fig. 6.

10. XI. Elem.

rectæ A B partibus delineabunt, pariter ut antehac in figuræ planæ exemplo commonstratum est; unde si superficies hoc modo procreatæ a plano quolibet ad rectam seu genetricem, seu directricem (quam ubique litam Superficiei productæ latus appellare licet) parallelo secetur, sectio communis duabus rectis parallelis constabit æqualibus inter se. De Superficiebus autem ità progenitis observatu dignum est (nec enim planè nudas magnitudinum generationes indigitare, sed & generales nonnullas ipsarum affectiones è diversis resultantes generandi modis insinuare propositum est nobis) quod si linea directrix recta sit (ut in figura per literam Z discriminata) Superficiei productæ partes parallelis lineis genetricibus interjectæ respectivis directricis lineæ partibus semper proportionales sunt (superficies nempe B C C B respectivis rectis B B:) At si linea curva pro directrice habeatur (ut in figura Y) non semper eveniet, ut interceptæ genetricibus rectis Superficies interceptis curvæ directricis partibus proportionentur; at saltem accidet hoc, cùm recta genetrix A B æqualiter ad curvam B C ubique, vel secundùm omnia ejus puncta inclinatur; quomodo fit in cylindri cujuscunque, laxè vel strictè dicti, recti superficie; quia tum recta genetrix omnibus curvæ punctis (hoc est omnibus eam ad dicta puncta tangentibus, sive subtensis rectis est perpendicularis.) Verum si, in exemplum, curva B C ponatur arcus circularis, qui dividatur æqualiter ad puncta B, non erunt necessariò superficies A B B A peripheriis æqualibus B B insistentes inter se pares, quia (præterquam in casu prædicto cylindri recti) rectæ A B ubique ad puncta B inæqualiter inclinantur (unam quamvis inclinationem cum alia conferendo) angulos nempe cum tangentibus ad B aliis ac aliis, & cum subtensis B B inæquales efficiunt. E qua re pendet *insuperabilis illa difficultas*, quacum confligtantur, qui *cylindricas obliquas superficies conantur dimetiri, seu cum Cylindricis Superficiebus rectis, aliisve quadantenus cognitis Superficiebus quoad proportionem comparare.* Supponunt denique consimili pacto superficiem quamvis planam directo motu sibi parallelo progredi, scilicet ut prædicto modo, singula ipsius puncta lineas rectas describant, inter se pares, ac parallelas; vel ut ejus singulæ rectæ (id quod indè consectatur) planas Superficies parallelogrammas effingant; cujusmodi motu describuntur prismatica quæque cylindricáque corpora; illa nimirum ipsa, de quorum Superficiebus mox egimus, quibúsque simili jure possunt adaptari, quæ Superficiebus istis ostendimus convenire. Veluti quòd parallelis planis interjectæ Superficies ipsorum, & ipsa corpora lateribus suis (seu directricis rectæ partibus respectivis) proportionantur. Quòd & si definita hujusmodi corpora planis

Fig. 6.

planis laterum alicui parallelis secentur, communes sectiones erunt *Parallelogramma* (quale est E E B B.) Quin, ut paucis complectar multa, quæ *de Superficiebus aut Solidis Prismaticis ac Cylindricis strictè dictis generatim ennunciantur aut probantur uspiam*, quòd ea pleraque justam analogiam observando, universis congruunt hoc modo progenitis quantis. Neque jam de progressivo motu quidpiam succurrit adjiciendum; quædam enim ἀποδιήγητα consultò videntur reticenda. Porrò simplicis motûs alterum genus, quod adhibet *Mathesis*, est *circumlatio*, *seu motus conversivus*; qui tum scilicet efficitur, cùm dimotæ magnitudinis quiddam (ut punctum aliquod puta lineæ, vel Superficiei linea) fixum & immotum consistit, dum ei velut innodata ac adstricta tota reliqua magnitudo, juxta quamvis assignatam directionem, circumagitur. Cujusmodi motûs generalissima proprietas est, ut quæque mobilis puncta dum in uno aliquo plano transversè moventur, circulares singula peripherias describant; & quidem omnia, quæ in eodem uno, per fixum punctum transeunte plano moventur parallelas, seu concentricas, & similes inter se; quæ vero in diversis planis similes, aut dissimiles, prout hypothesium exigit arbitraria diversitas. Præ cæteris autem propria, maximéque naturalis est circumlatio, cùm singula mobilis puncta circulares unius ejusdem circuli peripherias describunt, hoc est cùm in uno cuncta plano circumferuntur; qualem certè tum ipsa natura sponte concipit atque prosequitur, cùm nè rectos suos quos præsertim affectat motus exequatur ab immobili retinaculo prohibere; velut in pendulorum, & libris appensorum motibus videre est; imò cùm objectâ quâvis resistentiâ non satis facilè recto tramiti valet inhærere; sicut in *rotarum*, *& verticum*, *& turbinum*, *& in ipsorum fortasse syderum*, *motibus adparet*. Verùm hujusmodi motuum generalem indolem haud ità promptum est verbis explicare. Præstat ipsas quas accipiunt præcipuas hypotheses percensere. Assumunt primo rectam lineam in plano circa punctum quodvis in ipsa fixum posse circumferri; cujusmodi motu patet omnia lineæ motæ puncta circulares peripherias describere; singulas ab uno quovis descriptas singulis ab altero quolibet simul eodem tempore descriptis parallelas, & similes. Ut si linea recta A B manente fixo puncto C circumferatur, singula puncta A, E, B peripherias circulares A A, E E, B B sibi parallelas, & similes omnes (iisdem nimirum, aut æqualibus angulis subtensas, quorum commune centrum, aut vertex C) describent. Hoc autem modo constat procreari circulos, & sectorum circulares areas (quales ACA, B C B,) sed & annulos planos; qualis est is qui restat, si è circulo Fig. 7.

majore A A B B detrahatur minor circulus concentricus E E E E. E qua genesi colligitur circulorum, & sectorum circularium areas, è circularibus peripheriis, integris aut partialibus concentricis ac similibus, constare tot numero quot radius puncta habet; quarum proinde calculum ineundo circularis areæ talis qualis dimensio quam facillimè reperitur; id quod non est hujus temporis ulterius exponere. Quinetiam supponunt lineam quamvis rectam, indefinitè protensam, uno manente fixo ipsius puncto circa designatam quamvis in alio plano constitutam lineam, curvam aut è rectis compositam, revolvi, sic ut ei nempe lineæ semper insistat, vel eam quasi lambat, aut perstringat.

Fig. 8. Sit, exempli causâ, linea recta A B indefinitè protensa, & in ea fixum punctum V; & per V semper feratur linea A B juxta lineam quamlibet B C in alio plano collocatam; ità quidem ut aliquod lineæ mobilis punctum continuò lineæ B C inhæreat; ex hujusmodi motu producetur curva Superficies (è planis saltem composita, quam & generali ratione, post *Archimedem*, curvam appellare nil vetat) quæ quidem si linea directrix tota componatur è definitè magnis rectis lineis, fiet *Superficies pyramidalis*, è triangulis ad verticem V concurrentibus aggregata; sin circularis fuerit, aut conicarum sectionum aliqua, Superficies evadet strictè *conica*; sin alterius generis aliqua, conica saltem extenso latiùs significatu dicatur; & à quibusdam dicitur. Cujus quidem Superficiei proprietas est, ex ipsa generatione manifesta, quòd si per fixum punctum V plano secetur, communis plani cum ipsa sectio erit angulus rectilineus. Nam si planum ipsam secans per V lineæ directrici occurrat in punctis duobus, ut in D, E (occurret autem in duobus, aliàs Superficiem ipsam non secaret) ductæ rectæ V D, V E erunt tam in plano secante, quàm in curva Superficie; in plano, ex plani natura; in Superficie, quia genetrix eadem recta per harum terminos transit, ipsísque proinde coincidit. In hujusmodi verò motu posito quòd lineæ rectæ à puncto fixo V (seu vertice) ad directricem lineam B C ductæ sunt inæquales inter se, satis liquet lineam B C non à lineà B delineari, vel perambulari, quia

Fig. 8. lineæ inæquales (ut V B, V E, V C) sibi nequeunt congruere, adeóque punctum B progrediens supra, vel infra puncta B, E, C cadet; ut nec eâdem inæqualitate suppositâ punctum quodvis aliud in V B puta G) motu suo lineam describet lineæ directrici B C similem (quare linea V B supponitur indefinitè protensa) at verò si lineæ omnes, quæ ab V ad B C duci possunt (quas Superficiei propositæ latera nuncupemus licet) proportionaliter secentur (id quod fiet à plano per hanc Superficiem trajecto ad planum, in quo sita est B C, parallelo) divisionum

sionum puncta lineam constituent, saltem ad lineam consistent, ipsi BC similem. Ductis enim quotlibet lateribus VB, VD, VE, VC, & ducto plano GKLH ad planum BDEC parallelo, sint communes plani VBD cum planis BC, GH sectiones rectæ BD, GK; hæ parallelæ erunt. Item communes plani VDE cum iisdem planis BC, GH Sectiones DE, KL parallelæ erunt. Ergo anguli BDE, GKL sunt æquales. Item se habet recta BD ad GK, ut DE ad KL, quia utraque hæc proportio æqualis est illi, quam habet VD ad VK (similia quippe sunt triangula VDB, VKG, & triangula VDE, VKL) permutandóque BD. DE :: GK. KL. ergò omnes subtensæ in GH proportionales sunt subtensis omnibus in BC, eas nimirum in utraque linea ordinatim & deinceps accipiendo; & quæ sibimet adjacent in una pariter inflectuntur cum iis, quæ sibi adjacent in altera. Ergò secundum superiùs insinuata lineas BC, GH similes esse constat. || Hinc etiam patet lineas curvas similes BC, GH eandem ad se proportionem habere, quam Superficierum, in eadem qualibet recta sita, latera VB, VG. Quum enim subtensarum iisdem angulis inclusarum (ut BD, GK, vel DE, KL) singulæ rationes æquales sint rationi laterum VB, VG; etiam omnes antecedentes conjunctæ (hoc est tota BC) ad omnes consequentes conjunctas (hoc est totam GH) se habebunt ut VB ad VG. Hinc etiam tali motu productarum superficierum emergit hæc proprietas; quòd interceptæ scilicet à parallelis ad BC planis, à vertice desumptæ, quibuscunque lateribus iisdem inclusæ partes ipsarum sint inter se similes; ut puta Superficies BVC, GVH; & BVD, GVK. (Quod ex generali similitudinis doctrina posthac explicanda luculentiùs apparere poterit; interim ex similitudine linearum curvarum, & earum cum Superficiei lateribus analogia, penitúsque consimili Superficierum generatione satìs elucescit; saltem ex triangulorum VBD, VGK; & VDE, VKL, & talium omnium similitudine satìs constat; siquidem ex talibus infinitis triangulis utraque Superficies composita censeatur.) Unde similium Superficierum proprietates iis convenient. Verùm quòd interceptas attinet à diversis lateribus Superficies, eas inter se comparando, notandum est quòd basibus suis, seu directricis lineæ respectivis partibus non semper proportionales sunt; at saltem hoc tum evenit, cùm omnia dictæ Superficiei latera sunt æqualia inter se, adeóque cùm linea directrix est peripheria circuli; quo casu producta Superficies erit conica Superficies strictè dicta, rectúmque quidem ad conum pertinens. Quòd si directrix BC supponatur e. g. peripheria circularis, lateráque sibimet inæqualia, si

16. XI. Elem.

10. XI. Elem.

12. V. Elem.

dividatur B C in partes æquales, & connectantur latera V D, V E non erunt Superficies B V D, D V E, E V C æquales inter se, sed inscrutabili plerumque ratione; juxta varias angulorum inclusorum, & laterum inæqualium differentias, inæquales; id quod hactenus illos divexavit & torsit, *qui dimetiendæ coni scaleni superficiei incubuerunt.* || Ex his consectatur quòd possit hujusmodi circumlatio facta quadantenus concipi motu quoque tali lineæ rectæ genetricis, ità ut ejus singula quæque puncta parallelas lata similes directrici lineæ lineas describant, modo tamen concipiatur linea genetrix ubique proportionaliter aut contrahi, vel dilatari secundum omnes sui partes. Quomodo nempe si recta V B ita sensim diduci concipiatur, ut punctum B totam lineam B C perambulet, etiam punctum G parallelo ad B C motu delata, lineam G H ipsi B C similem describet. Quinimò si consimili pacto curva B C, directo quoad lineam rectam B V motu suúque semper ad seipsam parallelo concipiatur promoveri, sic ut ejus singula quæque puncta lineas rectas describant, secum omnes in punctum V concurrentes; hoc est ita ut ipsa per totum suum progressum juxta suas omnes partes analogicè contrahatur, ad verticem usque V; producentur ex hujusmodi motibus Superficies conicæ prorsus eædem cum jam proximè tractatis. Verùm hujusmodi motus imaginarii sunt, & quales rerum natura respuit. Explicandæ tamen hujusmodi Superficierum naturæ deservire possunt, & supponi saltem ut per *divinam potentiam effectibiles.* || Ad hæc, si *linea directrix* in motu proximè memorato supponatur undique clausa, sic ut figuram quamvis comprehendat, Superficies curva progenita cum hac figura, ceu base, corpus solidum includet pyramidale, vel conicum (strictè vel laxè pro dictæ figuræ natura sumptum) cujus generalia symptomata satis è dictis elucescunt. Nempe quod à parallelis ad hujusce solidi basin planis abscindentur similes ad verticem Superficies, similésque bases intercipientur, & similia corpora Solida progignentur. Verbo dicam, quæ de *Conis* generatim *Euclides*, *Apollonius*, aliique tradiderunt, ea conicis hoc modo factis, servatâ debitâ analogia, convenient, & simili ferme modo demonstrabuntur convenire. || Verùm usitatissimus apud Mathematicos corpora progignendi modus est is qui peculiari nomine *Rotatio* dicitur, & fit supposito lineam quamvis, aut quamlibet Superficiem planam circa rectam lineam fixam, tanquam axem, revolvi. Quomodo ex motu Semiperipheriæ circularis circa diametrum producitur *Spharica Superficies*, ex motu Semicirculi ipsius circa eundem *Sphæra* detornatur; ex motu lineæ rectæ circa lineam ipsi parallelam *Superficies Cylindrica*; ex motu parallelogrammi rectanguli circa latus unum ipse *Cylindrus rectus*; ex motu cruris unius

unius anguli rectilinei circa alterum *Conica Superficies*; ex rectanguli trianguli circa crus unum anguli recti *conus* ipse deformatur; eoque pacto *cùm integra cum suis Curvis Superficiebus Solida magnitudines innumera, tum ipsarum portiones, frusta, tubi, annuli procreantur.* Cujusmodi motûs hæc præcipua proprietas est, quòd singula quæque magnitudinis circumductæ puncta peripherias obeant circulares (integras quidem illas, modò perfecta sit revolutio, seu mobile denuo primum in situm restituatur, at similes utcunque sibi mutuo, quæ simul describuntur) quarum omnia Centra sunt in dicto axe, radii verò sunt rectæ ab ipsis punctis ad axem perpendiculares. Vel; quod omnes in mobili sitæ rectæ lineæ axi perpendiculares efficiunt circulos (si revolutio ponatur integrè peracta) aut circulares similes sectores, illos intelligo qui simul eodem tempore delineantur. Ut si v. g. linea quævis circa axem V K rotetur, eo procreabitur motu curva quædam Superficies, circularibus quasi peripheriis constans (*Atomistarum* enim phrasin facilitatis, perspicuitatis, brevitatis, addere licet & verisimilitudinis causâ non illibenter usurpo) circularibus, inquam, peripheriis AY, B Y, C Y, D Y per puncta A, B, C, D reliquaque quæ sunt in V D cuncta decircinatis; quarum radii sunt rectæ A Z, B Z, C Z, D Z axi perpendiculares, & Centra Z in axe. Quod si revolutio tantum eousque continuatur, donec V A D sit in situ V αδ, constabit *effecta Superficies* ex arcubus A α, B ϐ, C γ, D δ, similibus inter se eodem modo si planum V D Z circa axem V K revolvatur, posito quod integra peragatur conversio, producetur Solidum quasi constans innumeris circulis parallelis A Y, B Y, C Y, D Y, quorum (ut priùs) radii A Z, B Z, C Z, D Z, centra Z; positóque quod circulatio desistit in situ δ υ K, constituetur Solidum è Sectoribus A Z α, B Z ϐ, C Z γ, & reliquis inter se similibus. Cæterùm prætermittenda non est animadversio quædam perquam utilis, & necessaria circa *modum Superficierum, & Solidorum hoc modo resultantium dimensiones investigandi juxta methodum indivisibilium, omnium expeditissimam, & modò ritè adhibeatur haud minùs certam, & infallibilem.* Objicit huic methodo non semel, in pereruditio suo de *Solidis cylindricis ac annularibus libello, doctissimus A. Tacquetus*, eóque se putat illam destruere, quòd per eam inventæ *conorum, & Sphærarum superficies* (quantitates horum intelligo) veræ per *Archimedem* repertæ ac traditæ dimensioni non respondent. Sit exemplo *rectus conus* D V Y, cujus axis V K; per cujus omnia puncta transire concipiantur axi perpendiculares rectæ Z A, Z B, Z C, | Z D, &c. è quibus nempe juxta *methodum atomicam* componitur

Fig. 9.

Fig. 10, 11, 12.

| K

ponitur ipsum *triangulum rectangulum* V K D; & è circulis ad quas ceu radios descriptis ipse *conus* conflatur. Ergò, disputat, ex horum circulorum peripheriis *Superficies conica* componetur; quod tamen veritati comperitur adversari; methodúsque proinde fallax est. Reponο, malè calculum hoc pacto iniri; & in peripheriarum è quibus *Superficies* constant computatione diversam instituendam esse rationem ab ea, quâ computantur lineæ quibus *plana superficies* constant, aut plana, è quibus corpora formantur. Nempe peripheriarum Superficiem curvam constituentium è revolutione prognatam lineæ V D censeri debet è multitudine punctorum, quæ sunt in ipsa

Fig. 10, 11, 12. linea genetrice V D; quippe cùm per ea singula puncta tales peripheriæ transeant, nec plures transire queant; quicunque sit axis, seu longiùs distans, seu propiùs adjacens; axis enim solummodo, pro longiore vel propiore distantiâ positionéque varia, dictarum peripheriarum magnitudinem determinat. Verùm multitudo linearum ex quibus planum D V K supponitur constare, planorúmque quibus Solidum D V Y constat, è numero taxanda est punctorum in axe V K; nec enim plures intra terminos V K parallelæ, ipsi V K perpendiculares, rectæ, vel plura talia parallela plana duci possunt, quam horum punctorum multitudini æquinumera. Quod observando *discrimen* (sedulò perpendendum) omnem devitabimus errorem, & *curvarum hujusmodi rotatu genitarum Superficierum facillimo*, reor, *omnium quos rei natura subministrat modo perquiremus.* Illum commonstrabo. Pro reperienda v. g. dimensione *curvæ superficiei* lineæ V D circa axem V K revolutione, concipiatur ipsa V D in directum extendi, ità scilicet ut ei exæquetur recta V D; & ad ejus omnia puncta rectæ concipiantur applicari ipsi V D perpendiculares, & peripheriis circularibus, è quibus Superficies curva conflatur, ordine pares; singulæ singulis, puta A X ipsi A Y, & C X ipsi C Y, ac ità continuò. Erit ex his parallelis rectis constitutum planum V D X æquale *dictæ curvæ superficiei*; hujúsque partes illius partibus respectivis. Sin loco *peripheriarum* applicentur ipsarum respectivi radii A Z, B Z, C Z, & reliqui; spatium ex his rectis constitutum (quæ sanè proportionali cum alteris serie procedunt) se habebit ad *curvam Superficiem, ut circuli cujusvis radius ad ejus circumferentiam.* Unde siquâ ratione deprehendi possit *Summa radiorum peromnia lineæ genetricis puncta transeuntium* (hoc est si *spatii V D Z dimensionem* reperire contigerit) eo statim innotescet *curvæ Superficiei dimensio.* In exemplum, facilitatis ergò, proponatur *conica Superficies* D V Y, è rotatu procreata rectæ V D, circa axem V K. Ad rectam V D applicentur

plicentur rectæ A Z, B Z, C Z, D Z ad ipsam V D perpendiculares, & æquales singulæ singulis in cono circulorum radiis per easdem literas designatis; fiet autem in hoc casu *Spatium* V D Z triangulum, quia rectæ A Z, B Z, C Z æqualiter à se distantes æqualiter increscunt, id quod trianguli applicatis omnino proprium est. Hujus autem trianguli, ex datis altitudine V D & base D Z, dimensio in promptu est. Quod si fiat *ut circuli radius: Ad circumferentiam ipsius, ità triangulum V D Z ad quartum*, erit hoc quartum æquale *Superficiei conicæ propositæ*. Eodem planè modo perquam facilè *Sphæra, Sphæricarúmque portionum Superficies* (nec, datis & præcognitis iis quæ requiruntur, alias quaslibet hoc modo natas) investigare licet. At mihi propositum est generalioribus tantùm inhærere. || Hanc autem magnitudinum genesin æmulatur, & affinitate quâdam contingit iste modus, quum circa rectam lineam, (aut quidem circa quamvis aliam) similes innumeræ lineæ, vel figuræ parallelo juxta se situ dispositæ taliter constituuntur, ut singulæ centrum suum habeant in dicta linea, quæ proinde tanquam axis rationem subit, ac talis denominatur. Quomodò, e. c, in *cylindris obliquis*, inque *conis Scalenis* circuli circa lineam quandam rectam consistunt; quæ propterea dicitur ipsorum *axis*, quoniam in ea circulorum parallelorum *centra* existunt. Sed cùm motus ità distortos natura non capiat (saltem juxta modum operandi simplicem quem nunc supponimus) & quia possunt hujusmodi magnitudines ut. modis aliis genitæ faciliùs concipi, de iis abstinebimus. Neque non de magnitudinum per motus simplices effectione sufficiet hactenus disseruisse. ||

LECT.

Lect. III.

Quomodo per *motus simplices progressivum*, & *conversivum* *effecta concipiantur magnitudines*, & *qualia generationes istas consequuntur symptomata* (nonnulla saltem præcipua) *conati sumus exponere ad compositos nunc*, & *concurrentes, eidem proposito servientes, motus accingimur*; quorum in effectis discernendis velocitates, secundum quas simplices peraguntur motus, omnino, vel cum primis considerandæ sunt; quarum in generatione per motus simplices nulla prorsus habetur ratio. Per eundem enim motum simplicem seu velocior is sit, seu tardior eadem magnitudo, quamvis non eodem temporis intervallo, producitur; idem nempe *circulus* ex ejusdem rectæ circa punctum in ea fixum, *eadem Sphæra* ex Semicirculi circa *diametrum* rotatu; quamvis ut hæc fiant eo magis aut minus expectandum sit, quo segnior aut citatior supponitur ea progenerans motus. Verùm in generatione per motus compositos iisdem manentibus lationis modis, prout unius aut plurium variatur velocitas, nedum specie, sed etiam quantitate diversæ magnitudines emergere solent, positione saltem perpetuò differentes. Ut si recta AB per rectam AC parallelo deferatur æquabili motu; & simul punctum M in AB descendat uniformiter; vel simul recta AC parallelo quoque uniformi motu descendens ipsam AB promotam intersecet in M; ex ejusmodi motuum compositione vel concursu producetur recta linea AM. Quòd si eodem, etiam quoad velocitatem manente motu rectæ AB, immutetur in velocitate motus uniformis puncti M, vel rectæ AC, ità quidem punctum M jam eodem tempore pervenerit ad μ, vel AC secet ipsam AB in μ, describetur hoc motu alia recta $A\mu$ à priore AM positione diversa. Sin vero, manente rursus eodem motu rectæ AB, pro motu puncti M, vel rectæ AC uniformi substituatur motus, quem vocant, æqualiter acceleratus, ex ejusmodi compositione, vel concursu fiet linea parabolica

Fig. 13.

parabolica A M X vel etiam aliter posita A μ Y (prout hic motus acceleratus gradu ponitur alius ac alius.) Quòd si quâpiam aliâ ratione crescere concipiatur, aut minui dicti puncti vel lineæ velocitas alia progignetur inde, pro ratione *hypothesis*, diversa species magnitudinis. In his conspicitur exemplis quòd eodem subinde recidant *compositio motuum et concursus*; quod exinde quidem contingit, quia rectæ cujuspiam parallelo motu latæ singula puncta rectas describunt sibi parallelas, unde fit ut perinde sit an punctum ejus aliquod in ipsa fixum deferatur cum ea, vel solutum per lineam ejus directioni parallelam; ut nempe utrùm punctum M in AC fixum cum ea deferatur, an liberè decurrat per rectam AB eâdem velocitate. At sæpe non ita facile per horum utrumlibet modum *magnitudinum generatio* declaretur, sit enim recta AB æquabiliter rotata (hoc est, ita ut temporibus æqualibus æquales efficiat angulos) et simultaneè punctum M ab A in ipsa recta A B continuo motu feratur, etiam uniformi; ex ista *motuum* compositione linea quædam producetur, *helix* scilicet *Archimedea* (nam talia consultò proponimus *exempla*, *quò celebrium apud Mathematicos magnitudinum obiter naturam insinuem*, et instillem minùs ad hæc exercitatis; id transcurrens moneo) cujus generatio per nullos, opinor, mobilium concursus, liquidò commodéque satis explicetur; ita nimirum ut motuum istorum, vel eorum quantitatem determinantium angulorum, seu linearum, ratio, quantitasve dignoscantur. Generari quidem poterit è concursu paralleli motûs rectæ AC; vel circularis motûs rectæ BA circa Centrum quodvis B, concursu cum prædicto regulari motu circa Centrum A; at quæ sit tum futura rectarum AM, Aμ; vel angulorum ABM, ABμ quantitas difficilè constabit. E contrà, si recta BA circa Centrum B motu rotetur uniformi; et simul recta AC per AB parallelòs, & uniformiter deferatur, rectarum BA, AC ita latarum intersectio continua lineam quandam efficiet (illam nempe, quæ quadratrix dici solet) cujus generatio non ità clarè per strictè dictam motuum compositionem expediatur, aut explicetùr. Generari quidem potest per motum rectum alicujus puncti M in AB delatâ parallelòs ad primò positam AB; vel ex puncto tali in AC parallelo quoque delatâ; vel per motum puncti in AB, circa B; vel circa A rotatâ, rectè ab A versus B, vel à B versus A decurrentis; sed hujusmodi suppositâ quâpiam motuum compositione, quænam sit rectarum AM, aut BM; vel angulorum BAM aut ABM aut AMB, vel aliarum quarumvis magnitudinùm hosce motus determinantium quantitas, aut inter se relatio, difficulter innotescat. Qua præcipuè de causa

Fig. 14.

Fig. 15.

motuum compositionem ab ipsorum concursu secerno; quia nempe magnitudinum generatio nunc uno, nunc alio modò faciliùs explicatur. Verum ad illos distinctius exponendos accedo. De compositione primum. Cùm autem motus duobus modis compositus intelligi possit; vel ut è pluribus motibus aggregatus, vel ut de pluribus participans; de posteriore nos dissertamus; quem fortè non meliùs quàm prænobilis Philosophi verbis, & exemplis enucleatum dem.

Cartes. princ. II 31, 32. "Etsi autem (inquit ille) unumquodque corpus habeat tantùm "unum motum sibi proprium, quoniam ab unis tantùm corpori-"bus sibi contiguis, et quiescentibus recedere intelligitur, parti-"cipare tamen etiam potest et de aliis innumeris; si nempe sit "pars aliorum corporum alios motus habentium. Ut si quis am-"bulans in navi *horologium in* pera gestet, ejus horologii rotu-"læ unico tantùm motu sibi proprio movebuntur; sed participa-"bunt etiam ex alio, quatenus adjunctæ homini ambulanti unam "cum illo materiæ partem component; et ex alio quatenus erunt "adjunctæ navigio in mari fluctuanti; et ex alio quatenus ad-"junctæ ipsi mari; et denique alio, quatenus adjunctæ ipsi terræ, "siquidem tota terra moveatur. Omnesque hi motus revera e-"runt in rotulis istis, sed quia non facilè tam multi simul intel-"ligi, nec etiam omnes agnosci possunt, sufficiet unicum illum, "qui proprius est cujusque corporis in ipso considerare. Ac præ-"terea ille unicus cujusque corporis motus, qui ei proprius est, "instar plurium potest considerari; ut cùm in rotis curruum du-"os diversos distinguimus, unum scilicet circa ipsarum axem, et "alium rectum secundum longitudinem viæ per quam feruntur. "Sed quòd ideò tales motus non sint reverà distincti patet ex eo, "quod unumquodque punctum corporis quod movetur unam tan-"tùm aliquam lineam describat. Nec refert quòd ista linea sæpe sit "valde contorta, et ideò à pluribus diversis motibus genita vi-"deatur, quia possumus imaginari eodem modo quamcunque li-"neam etiam rectam, quæ omnium simplicissima est, ex infini-"tis diversis motibus ortam esse. Ut si linea A B feratur versus

Fig. 16. "C D, et eodem tempore punctum A feratur versus B, linea "recta A D, quam hoc punctum A describet, non minus pende-"bit à duobus motibus rectis, ab A in B et ab A B in C D, quàm "linea curva, quæ à quovis rotæ puncto describitur, pendet à "motu recto et circulari. Ac proinde quamvis sæpe utile sit u-"num motum in plures partes hoc pacto distinguere ad facilio-"rem ejus perceptionem; absolutè tamen loquendo unus tantùm

in

"in unoquoque corpore est numerandus. Ita *Cartesius.* Nempè cùm magnitudo quæpiam exinde quod aliis modo quopiam adnectitur, illorum motus ita particeps est, ut ab eo quoad situm suum aliquatenus determinetur, iste motus hujus compositionem quasi pars ingreditur, ab exemplis posthac adjungendis res luculentius apparebit. Motus autem hoc modo componi possunt *Progressivi* cum *Progressivis*, *Progressivi* cum *Circumlatitiis*, *Circumlatitii* cum *Circumlatitiis*; componi possunt, inquam, et decomponi modis innumeris; quorum omnium cùm inire censum impossibile sit, illosque qui à regularitate deflectunt intelligere difficile sit, exponere difficiliùs; nos præcipuos saltem aliquos, in usu magìs positos, et explicatu faciliores attingemus. Quales imprimis sunt ii qui è motibus directis et parallelis; è directis et rotatitiis, è pluribus rotatitiis componuntur; præsertim illi quos qui constituunt simplices motus omnes vel nonnulli sunt uniformes. Nam *uniformitatem nedum Respublica requirit, ac exigit Ecclesia, sed artes etiam atque scientia vehementer affectant.* Recti motus (quibus parallelos à recta linea directos motus adnumero) primum sibi non immeritò locum asserunt, ut simplicitate præcellentes, naturæ convenientes et chari, præ cæteris utiles ac usitati. Nec ulla sanè magnitudinis est species (nulla linea, nulla superficies, nullum corpus) cujus generatio non è rectis peracta motibus concipiatur. Omnis, inquam, in uno plano constituta linea procreari potest è motu parallelo rectæ lineæ, et puncti in ea; omnis superficies è motu parallelo plani, et lineæ in eo (lineæ scilicet alicujus è rectis modo jam insinuato motibus progenitæ) consequenter et linea quævis etiam in curva superficie designata rectis motibus effici potest. Corpus autem solidum eodem modo genitum intelligatur, quatenus è superficierum genitura resultat, et quatenus ab ipsis ità genitis terminatur, ac circumscribitur Sed quia *superficierum plerarumque curvarum*, quales hactenus *Mathesis* excogitavit, & linearum in iis non in uno plano jacentium, generatio per alios modos commodiùs explicetur, neque mihi quicquam succurrit animadversione dignum quod de iis dicam, de linearum saltem in uno plano existentium, per rectos et parallelos motus generatione dispiciam. Et quidem has quod attinet, earum nulla est quæ non ex motu parallelo lineæ rectæ, punctique per eam delati producatur; verum hi motus eo contemperari modo debent, quem specialis lineæ producendæ natura poscit; nec refert qualem, velocitatis respectu, motum uni tribuas, ad hujus modò

 diversitatem

diversitatem alterius diversitas ritè consequatur accommodeturque. Ut e. g. si recta Z A semper per rectam A Y sibi parallela feratur motu quolibet uniformi, vel difformi (crescente, vel decrescente vel alternante secundum velocitatem, juxta rationem quamvis imaginabilem) et in ea punctum aliquod M deferatur, itá tamen ut puncti motus lineæ rectæ motibus per singulas quasque temporis partes easdem proportionentur, producetur utique linea recta. Nempe si fuerit semper A B . A C :: B M . C μ . vel A B, M X :: A M, X μ (positâ scilicet M X ad A C parallelâ) liquet puncta A, M μ in una recta versari. Est enim rectæ lineæ proprietas in Elemento VI. demonstrata, quòd ad eam parallelas applicatæ rectæ lineæ suis ad designatum in ea punctum distantiis proportionales in rectam lineam terminantur. Quòd si motus hi sic inter se contemperentur, ut assumptâ quâdam lineâ D habeat rectangulum ex differentia lineæ D, & ipsius B M (à puncto mobili decursæ in recta A Z) & ipsa B M ad quadratum ex A B (eodem tempore decursâ à linea A Z) rationem semper eandem progignetur *ellipsis aut circulus*; circulus quidem si ratio proposita fuerit æqualitas, & angulus Z A Y rectus, *ellipsis* si secùs; & in his erit D una *diametrorum*, situm habens in linea A Z primò positâ, à vertice A porrecta versus partes Z. Sin itá se habeant, ut rectangulum ex summa linearum D, & B M & ipsa B M semper eandem cum quadrato ex A B proportionem servet, eo composito motu procreabitur *hyperbole*; quadrata quidem illa (vel æquilatera rectangula) si ratio designata fuerit æqualitatis, & angulus Z A Y rectus; sin aliter, alterius, pro rationis assignatæ quantitate, speciei; cujus *transversa diameter* æquabitur ipsi D, situm habens in Z A primo posita à vertice A protensa versus partes aversas ab Z; & parameter ex ratione data determinatur. Quòd si perpetuò rectangulum ex ipsa D, & decursa B M ad quadratum ex A B eandem perpetuo rationem obtinet, constabit effici *lineam parabolicam*, cujus *parameter* ex rectæ D, datæque rationis propositæ quantitate facilè definietur. Et in horum primo quidem casu si motus transversus per A Y ponatur uniformis, etiam motus descendens per A Z uniformis erit; in secundo & tertio si motus per A Y fit uniformis, erit motus descendens perpetuò crescens; eodemque posito quoad ultimum casum, in quo parabola fit; punctum M continuò velocitate crescet æqualiter. Nec absimili modo quævis alia linea tali motûs compositione producta concipi potest. Sed ut eò quo tendimus aliquando perveniamus; agedum videamus ecquid in *rem Mathematicam* utilitatis ex hujusmodi

Fig. 17.

modi ſuppoſita linearum generatione poterimus indipiſci. Simplicitatis autem & perſpicuitatis cauſâ ſupponamus alterum ex his motibus, rectæ nimirum paralleliſmum ſervantis, eſſe ſemper uniformem, & quænam ex alterius quoad velocitatem generalibus differentiis generales emergant linearum productarum affectiones adnitamur elicere. Adnitamur inquam, at proxima lectione.

LECT. IV.

Propoſitum eſt nobis è compoſitione motuum (qualem proximè deſcripſimus) emergentes linearum affectiones indagare ac exponere. Quorſum imprimìs methodi cauſâ repeto ſi recta A Z per rectam A Y ſibi perpetuò parallela feratur uniformiter, et in ea quoque punctum M uniformiter deportetur, quâvis velocitate, linea recta proveniet. Sumantur enim duæ quævis lineæ mobilis A Z poſitiones, ad B ſcilicet & C; & quia motus per A Y ponitur uniformis, erunt decurſa ſpatia A B, A C ad ſe, ut *Tempora*; ſed et ob motum uniformem puncti M etiam rectæ B M, C M ſe habebunt ut eadem tempora; eſt igitur A B. A C :: B M. C M. Unde liquet puncta A, M, M in una recta linea exiſtere. Parique ratione conſtat idem de punctis omnibuſcunque, quibus punctum M per totum ſuum curſum inſiſtit, aut coincidit. Supponatur ſecundo punctum M motu continuo increſcente deferri (juxta quamlibet velocitatis rationem, regulari modo quocunque nil intereſt, an irregulari) aio *ſuppoſitionem hanc conſectari progenitarum linearum quas apponemus proprietates generales* (quales uni tali linearum generi convenientes certè præſtat ex unimoda communi generatione ſimul univerſas elicere, quàm de ſingulis, ut paſſim fieri ſolet, ſingulas ſeparatim oſtendere.) Notetur interea, quòd brevitatis cauſâ motum parallelum uniformem rectæ A Z per A Y appellabo ſubinde *motum tranſverſum*; puncti verò moventis ab A in linea A Z motum vocitabo *deſcenſum*, aut *motum deſcendentem*, habito ſcilicet ad figuram exhibitam reſpectu. Item quòd, ob motûs per A Y et ei parallelas uniformitatem, poſſit ea cum ipſius partibus motûs tempus, et ejus partes repræſentare. Jam ad dictas proprietates expendendas accedo. I. Hoc.

Fig. 18.

Fig. 19.

Fig. 19. I. Hoc modo (per motum nempe transversum uniformem, & descensivum continuo crescentem) progenita linea per omnes sui partes curva evadet. || Accipiantur enim in ipsa tria quælibet puncta M, N, O; per quæ transeant B Z, C Z, D Z ad A Z parallelæ, & per puncta M, N ducatur recta M N K. Et quia recta M N gignitur è motu composito transverso per B C (vel huic parallelam M G) & descendente per A Z, uniformi utroque; transversus autem per M G est prorsus idem cum transverso, quo linea proposita M N O describitur; patet velocitatem descendentis motûs uniformis rectam M N gignentis minorem esse velocitate, quam motus itidem descendens, lineam M N O describens, habet in N (etenim nisi motus hic velocior jam sit illo, cùm continuò crescere ponatur, in toto tempore descensus per G N illo tardior fuisset, adeóque nunquam eodem tempore spatium æquale transegisset, nec una cum eo pertigisset ad punctum N) ergò motus hic inæqualis & increscens per tempus motûs uniformis C D continuatus (quo nempe gignitur linea N O) majus spatium emetitur, quàm uniformis motus descendens, quo M N. ad K protractus describitur, eodem tempore C D; (liquet enim eodem tempore à majore vi crescente majus spatium peragi, quàm à minore neutiquam crescente) quare linea H O major est quam H K; adeóque tria puncta M, N, O non existunt in eadem recta linea; quod cùm tribus quibusvis lineæ M N O punctis conveniat, abunde patet eam esse nullibi rectam, sed per omnes sui partes incurvatam, & inflexam.

II. Hinc emergit *Corollarium*; velocitas motûs uniformis descendentis, quo curvæ M N O subtensa quævis (ut M N) describitur, existente scilicet communi transverso motu uniformi quo ipsa, ejúsque arcus fiunt, minor est velocitate, quàm motus descensivus increscens habet ad communem utriusque terminum N.

III. Hujusce curvæ *subtensa* quælibet (ut M O) intra *suum arcum* (versus partes A Z) tota cadit, & producta tota cadit extra lineam M N O.

Elem. III. 2. *Apoll.* I. *Seren.* I. 8. Nam si sumatur in arcu M O punctum quodvis N, & connectantur rectæ M N, N O liquet totam M O intra rectas M N, N O jacere, & proinde intra curvam M N O. Tota verò, si producatur, extra lineam M N O cadit, quia nusquam alibi ei occurrit, uti mox ostensum.||

Hoc accidens de circulo speciatim demonstrat *Euclides*, *de sectionibus conicis Apollonius*; *de cylindricis Serenus*.

IV. Patet

IV. Patet curvam propositam esse convexam, aut concavam ad easdem partes (convexam versus partes superiores vel exteriores AY, concavam introrsum, aut deorsum versus AZZ) nam hoc ipsum, fore convexum aut concavum ad easdem partes, nil omnino designat aliud, quàm à nulla recta linea præterquam duobus punctis secari, nec alio recidit, quam initio libri de sphæra & cylindro tradit *Archimedes*, lineæ ad easdem partes cavæ definitio. Perspicuum est v. g. ut linea MN duobus in punctis M, N curvam MNO secans ei rursus occurrat, ut puta in K, debere curvam MNO reflecti, versúsque partes AY recurvari; id quod modò demonstratum est non posse contingere. Quapropter ipsa linea versus easdem partes convexa est, seu concava.

V. Apertissimè constat lineas quasvis rectas (ut BZ, CZ) genetrici AZ parallelas propositam curvam secare (modò contineantur intra terminos motûs per AY; quia curva per harum quamvis indefinitè promotam descripta censetur) addo quod harum quælibet curvam in uno tantùm puncto secat. || Id patet, quia recta genetrix AZ per unicum duntaxat instans temporis durat in situ quovis uno, seu BZ; simúlque pertingit ipsam BZ, ac deserit; prætérque punctum unum M in BMZ reliqua cuncta lineæ curvæ puncta sunt in parallelis ad BZ. Ergo liquidum est ipsam BZ in uno tantùm puncto curvam secare. || Hoc ipsum de parabola, & hiperbola speciatim ostendit *Apollonius*; de sectionibus conoideon *Archimedes*. *Apoll.* I. 26. *Arch. de Conoid. & Sph.* 16.

VI. Non dissimili modo patet ad AY parallelam quamvis, (qualis PG) unico puncto propositam curvam attingere. || Quòd semel occurret (modò contineatur intra limites descensûs per AZ) patet, quia punctum mobile continuò descendens, indefinito progressu, eam indefinitè protensam aliquando trajiciet; nec in eo tamen præterquam ad unum temporis momentum perdurat. || Videatur hoc de sectionibus conicis ostendens *Apollonius*. I. 19.

VII. Patet omnes curvæ subtensas rectas cum AZ & ei parallelis, si producantur, concurrere.

Quòd enim subtensa quævis, ut MN, uni parallelarum alicui, ut BR, occurrit, ibi scilicet ubi ipsa curvam secat, exinde manifestissimum est, quòd tota curva per parallelam dictæ rectæ motum describitur. Ergò, cùm uni occurrat, omnibus occurret; quæ enim uni parallelarum

larum æquidiſtat recta, pariter omnibus æquidiſtat, ut in elemento primo demonſtratur.

I. 22. Operæ pretium exiſtimavit *Apollonius* hoc de *parabola*, & *hyperbola* ſpeciatim demonſtrare.

VIII. Simili modo patet rectas quaſcunque curvas tangentes una tantùm excipitur, ad extremum lineæ recurrentis. Vid. 18. hujus. Iiſdem parallelis occurrere. || Etiam hoc, quoad *ſectiones conicas*, uno

I. 24, 25. vel altero *Theoremate* demonſtravit *Apollonius*.

IX. Quinimò rectæ quævis ipſam A Z ſecantes (infra punctum A, ſupráque limitem, ſiquis erit, motûs deſcenſivi) curvam ſecabunt.

Cùm enim omnes ipſi A Z parallelas ſecent etiam infinitè productæ curvam ſecent oportet. *Hujuſmodi Symptomatis demonſtra-*

I. 27, 28. *tioni in ſectionibus conicis* laborioſam operam impendit *Apollonius*.

X. Porrò liquet applicatas ad rectam A Y, ipſi A Z parallelas (quas nempe propoſitæ curvæ ſinus verſos appellare fas erit minorem inter ſe rationem habere (minores cum majoribus comparando, ſeu minores antecedentium loco ponendo) quàm habent reſpectivæ ipſius A Y partes, iiſdem temporibus decurſæ (quas & curvæ propoſitæ ſinus rectos appellare nil dubitem.) Nempe B M ad C N minorem rationem habet, quàm A B ad A C, vel B M ad C F; quia $CN \sqsubset CF$. || Hoc de circulis, & aliis curvis ſpeciatim reperiatur paſſim oſtenſum.

Ad ſequentia notandum, quod ſi recta tranſverſim & parallelus mota retrogradè (à D puta verſus A per D A) moveri concipiatur, ab aliquo curvæ propoſitæ puncto, velut O, incipiens; eâdemque ſemper ratione dictum punctum ab O aſcendens quoad velocitatem decreſcat, quâ ad ipſum O deſcendens increverat, eadem curva producetur. Quidni? Cùm idem motus ſit, inversè tantum conſideratus.

XI. Supponatur rectam lineam T M S propoſitam curvam in puncto M tangere (ſic ut eam nempe non ſecet) occurrátque tangens hæc rectæ A Z in T, ducatúrque per M recta P M G ad AY parallela; dico velocitatem puncti deſcendentis, eoque motu curvam deſcribentis, quam habet ad contactum M, æquari velocitati, quâ recta T P deſcribetur uniformiter eodem tempore, quo recta A Z fertur

per

per AC vel PM. (vel, quòd eodem recidit, dico quòd velocitas puncti descendentis in M ad velocitatem quâ fertur recta AZ se habet, ut recta TP ad PM.) Sumatur enim ubivis in tangente punctum aliquod K; & per ipsum ducatur recta KG, curvæ occurrens in O; parallelis autem AY, & PG in D, & G. Et quia tangens TM duplici concipiatur uniformi motu descripta, altero rectæ TZ per AC vel PM parallelis delatæ, altero puncti descendentis a T per TZ; & sit horum motuum alter per AC, vel PM communis vel idem cum illo quo curva describitur; cùm TZ est in situ KG, erit AZ in eodem; ergo cùm punctum à T descendens fuerit in K, erit punctum ab A descendens in curvæ cum KG intersectione O (nec enim, ut anteà deductum est, alibi recta KG curvam secat) est autem punctum O infra K quia tangens extra curvam tota versatur. Jam si punctum K ponatur supra contactum versus T; quoniam tum OG minor est quàm KG, liquet velocitatem puncti descendentis, quo curva describitur, in curvæ puncto O minorem esse velocitate motûs uniformis descendentis, quâ tangens efficitur; quoniam illa semper increscens eodem tempore (per GM repræsentato) minus spatium transigit, quàm hæc minimè crescens; ast eadem continuo perseverans, illa scilicet rectam OG hæc rectam KG conficit. Contra vero si punctum K infra contactum ad partes S existat, quoniam OG tum major est quàm KG, patet velocitatem puncti descendentis, quo curva fit, in puncto O majorem esse velocitate motûs uniformis itidem descendentis, quo tangens efficitur; quia motus iste, continuò decrescens eodem per GM tempore, majus peragit spatium OG, quàm hic minimè decrescens, at in eodem tenore persistens, conficit, ipsum nempe spatium KG. Ergo cùm velocitas curvam describentis puncti quovis in curvæ puncto supra contactum versus A minor sit velocitate motûs per TP; quovis autem in puncto infra contactum eâdem major, liquet in ipso contactu M ei penitus exæquari. Q. E. D. Fig. 20.

XII. Hujus conversa, consimili discursu, rem breviùs exponendo, demonstretur. Nempe, si velocitas puncti descendentis ab A in aliquo curvæ puncto M æquetur velocitati, quâ punctum T uniformiter latum, rectam TP describeret tempore PM vel AC (vel sit velocitas motûs descendentis ad M ad velocitatem motûs transversi, ut TP ad PM) recta TMS curvam AMO tanget ad M.

Nam sumpto quovis in recta TS puncto K, & ductâ KG ad AZ parallelâ; quoniam versus partes AT velocitas ascendentis puncti, curvam efficientis, semper decrescit ab M ad O, illi verò ex hypothesi par velocitas puncti rectam MT gignentis haud decrescit ab M ad K, sitque tempus MG commune, erit spatium GO minus quàm GK; unde punctum K erit extra curvam. Item, quia versus alteras partes, velocitas descendentis, quo curva fit, increscit semper ab M versus O; æqualis autem ei velocitas, quâ recta MS fit, haud crescit ab M ad K; idémque sit rursus tempus MG, liquet rectam GO excedere rectam GK; & idcirco punctum K supra curvam existere. Quare manifestum est omnia dictæ rectæ puncta extra curvam existere; & eam proinde curvam contingere: Q.E.D.

XIII. Ex hisce statim *consectatur*, *hujusmodi curvas ad unum punctum ab una tantùm rectâ contingi*.

Nam tangere ponatur recta MT curvam AMO ad M; & si fieri potest altera MX etiam tangat. Ergò eodem tempore, eâdem velocitate (illâ scilicet, quæ puncti curvam describentis ad contactum M acquisitæ velocitati æquatur) describetur utraque recta XP, TM; quare XP, TP æquales erunt, totum & pars: Q.E.A. Ergò non tanget altera præter positam MT.|| *Hanc speciatim de circulo demonstravit Euclides; de Sectionibus Conicis Apollonius*, de lineis aliis alii. Exhinc *Lucrum* emergit haud aspernandum, quòd eâdem operâ *propositiones de tangentibus inversæ demonstrantur*. Nempe si determinetur angulus PMT (vel alter quispiam quem recta positione data cum tangente facit ad punctum curvæ designatum) aut si determinetur quantitas rectæ PT (vel similis cujuspiam alterius à puncto in data positione recta designato per tangentem interceptæ) eo tangens determinabitur. Et permutatim, si tangens situ determinetur, angulorum atque linearum ejusmodi quantitas indè dignoscetur. Adeòque parcetur operæ, qualem insumpserunt plerique tales propositiones inversas demonstrandi. Quod & eo magis observatu dignum est, quia sæpe talium inversarum propositionum una quàm altera longè promptiùs invenitur, atque faciliùs demonstratur. Cujus observationis, nisi longiùs evagari nollem, in promptu forent *Specimina*.

Eucl. III. 16, 17.
Apoll. I. 32, 33, 34, 35, 36.

XIV. E dictis infertur puncti descendentis velocitates in duobus quibusvis designatis curvæ punctis ad se proportionem habere reciprocè com-

compositam è rationibus applicatarum ab istis punctis ad rectam A Z (ipsi scilicet A Y parallelarum) & interceptarum à tangentibus ad ista puncta ac dictis applicatis (vel, rationem velocitatum æquari rationi applicatarum ex interceptarum ratione subductæ.)

Nempe si duæ rectæ M T, N X curvam tangent ad puncta M, N; protractæ Z A occurrentes in T, X; & applicentur N P, N Q ad Y A parallelæ, velocitatum ad puncta, M, N proportio componetur è proportione ipsius T P ad P M, & ipsius Q N ad Q X. Nam velocitas in M ad velocitatem uniformem per A Y se habet ut T P ad P M; & velocitas ista uniformis se habet ad velocitatem in N, ut Q N ad Q X. Ergo velocitas in M ad velocitatem in N ex his duabus rationibus P P ad P M, & Q N ad Q X componetur. Notetur à concursu tangentium ductâ F E ad A Y parallelâ; fore T E, X E = T P . P M + Q N . Q X. Fig. 21.

XV. Obiter interjicio generalem hinc & bene facilem consequi *Problematis istius solutionem*, quam tanti fecit, & cui tantum laborem impendit *Galilæus*, quámque *Torricellius* pronunciat eum quam optimè & ingeniosissimè reperisse. Rem ità proponit *Torricellius* (nam ipse *Galilæus* ad manum non est) propositâ quâvis *parabolâ*, cujus *vertex* A oportet punctum aliquod sublime reperire; è quo si grave cadat usque ad A, & ex puncto cum impetu jam concepto horizontaliter convertatur, ipsa *propositam parabolam* describat (notetur, quod motus descensivus parabolam describens non è puncto sublimi, sed ab ipso puncto A censetur inchoare.) Huc recidit *Problema*, *Galilæi* suppositis insistendo, ut determinentur particulares velocitates motuum, uniformis horizontalis, seu transversi, & æqualiter crescentis descensivi quorum è compositione descripta concipitur exhibita parabola. Nos illud, quæcunque sit crescentis descensivi motûs ratio, quicunque modus, generaliter exequemur; specialem illum de *parabola* casum in exemplum subjuncturi. || Reperiatur in recta A Z (quæ sanè curvæ diameter est) punctum aliquod, ut P, à quo si ordinatim applicetur P M, & ducatur tangens M T, rectæ A Z occurrens in T, sit intercepta T P æqualis ipsi P M; tum sumatur in Z A protractâ recta A S = A P. Dico factum. Fig. 22.

Nam quoniam S A = A P, concipiet mobile descendens ab S in A tantum impetum, quantum ab A ad P curvam describendo (ponitur enim increscentis velocitatis motus utrobique prorsus idem) iste vero impetus æquatur impetui, quo mobile à T descendens uniformi motu percurr... rectam T P, eodem tempore quo recta A Z uniformiter

 lata,

lata, perque motum istum in curva describenda conspirans, percurrit rectam PM. Cùm igitur sint TP, PM ex constructione pares, adeóque velocitates motuum, quibus simul peraguntur, æquales; etiam motus descensivus in P, vel M æquabitur motui transverso, curvam describenti, hoc est motus ab S ad A velocitas in A eidem æquatur. Ergo punctum S est id ipsum, quod inveniri debuit, & absolutum est propositum. | Exemplo sit *parabola*, quæ facta concipitur ex motu uniformi horizontali, & descensivo pariter accelerato; tum punctum P ita facilè per *Analysin* investigatur. Sit recta R *dictæ parabolæ rectum latus*. Est igitur ex *parabolæ* natura, $R \times AP = PMq$ $= TPq$ (ex hypothesi modi nostri generalis.). Item, ex parabolæ nota proprietate est $TPq = 4 APq$. Ergo est $R \times AP = 4 APq$. Adeóque $R = 4 AP$; vel $\frac{1}{4} R = AP = SA$. Nimirum ita *Galilæus* determinavit. In hoc autem casu puncta T, S coincidunt. Quod si rursus gravia juxta *triplicatam temporum rationem* velocitate crescendo descendant, adeóque motus ipsorum talis cum uniformi transverso compositus *parabolam cubicam* describat, & sit R istius curvæ *parameter*, erit eo in casu $SA = \sqrt{\frac{Rq}{27}}$ nam ex hujusce curvæ proprietate est $Rq\,AP = PM$ cub. Et ex hujus regulæ generalis præscripto est $PM = TP$, adeóque PM cub. $= TP$ cub. Denique quoniam in hujusmodi *parabola* tangentis intercepta semper trisecatur a vertice (nimirum ut sit $AP = \frac{1}{3} TP$) est TP cub. $= 27 AP$ cub. Erit igitur $Rq\,AP = 27 AP$ cub. Adeóque $Rq = 27 APq$; vel $\frac{Rq}{27} = APq = SAq$. In reliquis simili ratione procedentes assequemur propositum. Possent opinor & hinc nedum pleræque *Galilæi propositiones* huic affines, & hanc attingentes materiam utcunque deduci, sed & generaliores reddi, vel ad alia curvas omnigenas extendi. Verùm parco pluribus, hoc *specimine* (quoad ista) contentus; huc non nisi per transcursum adducto. Ad alia pergo prædictis cohærentia.

Fig. 22.

XVI. Si ad rectam lineam applicetur *plana superficies*, cujus singulæ quæque partes applicatis ad istam rectam parallelis interceptæ proportionales sint rectis ad rectam AY simpliciter divisam applicatis (ad AZ nempe parallelis.) Hujusce superficiei ad parallelogrammum æquealtum, super eadem base constitutum, proportio proportionem indicabit ipsarum AP, TP, à puncto P vertici, tangentique interjectarum.

Ut

Ut si ad rectam $\alpha\delta$ applicetur plana superficies $\alpha\delta\mu$, & utcunque divisâ A D punctis B, C, similitérque divisâ rectâ $\alpha\delta$ punctis ζ, γ, fuerit ut B M ad C M ita superficies $\zeta\alpha\mu$, ad superficiem $\gamma\alpha\mu$, & hoc in comparationibus universis taliter institutis contingat; *completo parallelogrammo* $\alpha\delta\mu\varphi$, *se habebit recta* A P *ad rectam* T P *ut superficies* $\alpha\delta\mu$ *ad parallelogrammum* $\alpha\delta\mu\varphi$. Et enim si recta $\alpha\delta$ commune tempus designare concipiatur, quo recta A D motu æquabili, rectáque D M motu continuè accelerato transiguntur, recta $\delta\mu$ bene designabit velocitatem hujus definiti temporis maximam, quam habet punctum descendens in curvæ puncto M infimo; hoc est velocitatem quâ recta T P uniformiter decurritur eodem tempore; quapropter (ut antehac commonstratum est) *Parallelogrammum* $\alpha\delta\mu\varphi$ optimè *Spatium* repræsentabit, quod hâc eâdem permanente velocitate per totum tempus $\alpha\delta$ uniformiter describitur, hoc est ipsam rectam T P. Cùm igitur, ex hypothesis præstratæ conditione, figura $\delta\alpha\mu$ rectam D M, vel A P, repræsentet, erit ut figura $\delta\alpha\mu$ ad parallelogrammum $\alpha\delta\mu\varphi$, ita A P ad T P; cognitáque proinde modo quovis istâ proportione, simul hæc innotescet; & reciprocè. Exemplo res manifestior evadet uno, vel altero. Proposita curva sit *parabola quadratica*, seu in qua rectæ B M, C M se habent, ut quadrata ex A B, A C, hoc est ut quadrata ex $\alpha\zeta$, $\alpha\gamma$. Ergò si figura $\alpha\delta\mu$ sit triangulum, id optimè quadrabit huic negotio. Nam eo supposito semper triangula $\zeta\alpha\mu$, $\gamma\alpha\mu$ proportionalia erunt quadratis ex $\alpha\zeta$, $\alpha\gamma$, hoc est rectis B M; C M. Quoniam verò triangulum $\delta\alpha\mu$ parallelogrammi $\delta\alpha\varphi\mu$ est subduplum, erit recta A P quoque rectæ T P subdupla; quod ita se habere demonstratum habetur in *conicis elementis*, & passim agnoscitur. Sit rursus curva A M M *parabola cubica*; & quoniam in ea rectæ B M, C M se habent ut cubi rectarum A B, A C, hoc est ut cubi rectarum $\alpha\zeta$, $\alpha\gamma$; & si *superficies* $\alpha\delta\mu$ *fuerit complementum semiparabolicæ quadraticæ portionis, trilinea* $\alpha\zeta\mu$, $\alpha\gamma\mu$ *cubis ex* $\alpha\zeta$, $\alpha\gamma$ *proportionalia erunt* (ut à *Pappo*, ac aliis ostenditur, & ex *Archimidis parabolæ dimensione* quàm facillimè deducitur) itaque negotio proposito quàm rectissimè adaptetur *parabola quadratica*; cumque constiterit aliundè tum figuram $\alpha\delta\mu$ subtriplam fore parallelogrammi $\alpha\delta\mu\varphi$; erit etiam juxta regulæ jam assignatæ præscriptum recta A P quoque subtripla rectæ T P. De qua conclusione satis convenit inter *Geometras*.

Fig. 23, 24. *Hæc posthàc* ἀκριβέστερον *demonstrata habentur.*

XVII.

XVII. Huic suppar modus dictas rectas AP, TP comparandi tali *Theoremate* continetur: Si ad rectam aliquam lineam (hoc est
Fig. 23, 24. ad ejus singula quæque puncta) applicentur rectæ lineæ parallelæ, ad rectam AD consimiliter divisam applicatarum differentiis proportionales, resultantis hinc plani ad parallelogrammum æque altum, ad eandemque basin positum, rectarum AP, TP proportionem exhibebit. Ut si rectæ AD, $\alpha\delta$ similiter (in partes scilicet æquales indefinitè multas) dividantur; & rectæ $\beta\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ rectis BM, NM, OM (quæ differentiæ sunt rectarum ad AD applicatarum, incipiendo à puncto A) proportionales sint, erit ut figura $\alpha\delta\mu$ ad parallelogrammum $o\delta\mu\phi$, ità AP ad TP. Cum enim recta quæpiam ex applicatis ad AD; puta *v. g.* DM æquetur omnibus seipsâ minorum differentiis (ipsis nempe BM, NM, OM) & trilineum $\alpha\delta\mu$ constituatur è rectis $\beta\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ eâdem proportione crescentibus; ut & recta CM æquatur ipsis BM, NM; & ei respondens trilineum $\alpha\gamma\mu$ quasi conflatur è parallelis $\beta\mu$, $\gamma\mu$ pari ratione crescentibus; & hoc semper eveniat; omnino patet trilinea $\alpha\delta\mu$, $\alpha\gamma\mu$, $\alpha\beta\mu$ rectis DM, CM, BM proportionari; proindéque modum hunc in priorem recidere; nec ab eo reipsà differre. Notetur autem hic rectas $\beta\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ velocitates repræsentare, quas punctum mobile curvam delineans obtinet in respectivis ejus punctis M; ut & trilinea $\alpha\beta\mu$, $\alpha\gamma\mu$, $\alpha\delta\mu$ velocitates aggregatas exhibent ab initio ad definita respectiva temporis instantia; quibus (ut jam olim præmonitum) respondentia spatia BM, CM, DM proportionantur.

XVIII. E supradictis porrò consectatur, quòd si *Circulus*, *Ellipsis*, ejusmodique curvæ recurrentes hoc progenitæ concipiantur modo, punctum eas describens infinitam in recursùs puncto velocitatem habebit. Nempe si quadrans AFM ità generetur; quoniam
Fig. 25. tangens TM diametro AZ est parallela, nec illa proinde cum hac nisi ad infinitam distantiam convenit; ergo velocitas in M ad velocitatem uniformis motûs per AY se habebit, ut infinita recta ad ipsam
II. *preced.* PM; unde velocitas ista ad M prorsus infinita sit oportet. Ità quidem quoad hujusmodi curvas; at quoad alias ad infinitum sensim continuatas (quales *parabola* & *hyperbola*) descendentis puncti velocitas in quovis designato curvæ puncto finita est. Verùm his omissis ad alias propositæ curvæ proprietates exponendas progrediamur.

LECT. V.

LECT. V.

IN deducendis è propositâ generatione curvarum affectionibus etiamnum progredimur.

I. *Anguli, qui fiunt ab applicatis & tangentibus ad diversa curvæ puncta, sibimet inæquales sunt; & minores sunt illi qui puncto A (seu vertici) propiores sunt.*

Tangant rectæ TM, XN; & ad AY parallelæ sint MP, NQ; dico fore angulum PMT minorem angulo QNX.

Nam producta recta TM occurret ipsi QN extra curvam protractæ, puta ad E. Item ipsa XN secabit applicatam PM extra curvam, puta ad H. Manifestum est autem cùm puncta H, N sint ad alias, ac alias partes rectæ ME, rectas ME, NH sese intersecare inter parallelas PH, QE; quare major est angulus externus QNX interno QET, hoc est angulo PMT: Q. E. D. Fig. 26.

II. Hinc *porismatis* loco habetur *tangentes se intersecare inter ordinatim applicatas per puncta contactuum; velut ad F, inter TM, QN protensas.*

III. Item *angulum PTM angulo QXN majorem esse*; (externum scilicet interno.)

IV. Item patet vertici propiores applicatas (proindéque rectas quasvis aliis parallelas) curvæ obliquiùs incidere quàm remotiores.

Cæterum ista jam olim de *Sectionibus Conicis* ostenderat *Apollonius*, ut in edito nuper VI *conicorum libro* est videre.

V. In figura præcedente (posito applicationis angulum TAY rectum esse, vel obtusum) *dico curvæ arcum MN rectâ NH, majorem esse; rectâ verò ME minorem.*

Nam

Nam connectatur subtensa M N, ducatúrque recta N R ad Z A parallela. Et quoniam angulus X P H non minor est recto, erit, eo major externus, N H P obtusus. Ergò recta N M major est quam N H. Itaque magis arcus, arcus N H major est quàm ipsa N H: Q. E. D.

Item, quoniam ang R N E ipsi X Q E par haud minor est recto, erit $RE \sqsubset RN$. quare $MR + RE \sqsubset MR + RN$. hoc est $ME \sqsubset MR + RN$. Est autem (ex *Archimedaeis* assumptis) $MR + RN \sqsubset$ arc. M N. ergò magis est $ME \sqsubset$ arc. M N. ∴

VI. Perutilis est hæc propositio in *tangentium demonstrationibus expediendis*. Etenim hinc consectatur, si arcus M N indefinitè parvus ponatur, ejusce loco alterutram tangentis particulam M E, vel N H tutò substitui.

Speciminis hìc loco *methodum proponam generalem cycloidum omnium, & consimili modo descriptarum curvarum tangentes determinandi*, hinc petitâ demonstratione munitam.

Fig. 27. Recta A Y sibi parallelè deportata quamcunque curvam ad easdem partes convexam aut cavam, A P X perambulet uniformi motu (scilicet ut æquales curvæ partes æqualibus transigat temporibus) eodémque simul tempore punctum aliquod ab A per A Y etiam uniformiter feratur; ab hoc puncto taliter moto progignetur curva A M Z; cujus ad datum quodcunque punctum M tangentem oportet determinare. Ut hoc fiat, ducatur recta M P ad A Y parallela, curvam A P X secans in P; perque P ducatur recta P E curvam A P X contingens; huic verò per M ducatur parallela M H; inque hac sumatur punctum quodpiam R, & ducatur R S ad P M parallela; tum fiat ut curva A P ad rectam P M (hoc est ut unus motus uniformis ad alterum) ita M R ad R S; & connectatur M S. hæc curvam A M Z continget. Sumatur enim in hac curva punctum quodvis Z, per quod ducatur recta Z X ad M P parallela, secans curvam A P X in X, ejúsque tangentem in E; & huic parallelam M R in H; ipsámque demum M S in K. Sit autem primo punctum Z supra M versus A; unde recta $PE \sqsupset$ arc P X. adeóque $PA . PE \sqsubset$ arc $PA . PX$ :: $PM . PM - XZ$ :: $PM . EH - XZ$ :: $PM . ZH - EX \sqsubset PM . ZH$. quare permutatim erit $PA . PM \sqsubset PE . ZH$. est autem $PA . PM$ :: $MR . RS$ :: $MH . KH$ :: $PE . HK$. ergò $PE . HK \sqsubset PE . ZH$. quare $HK \sqsupset ZH$. est autem punctum H extra curvam A Z M, ob $EZ \sqsupset XZ \sqsupset PM = EH$. ergò palam est punctum K extra curvam A Z M existere. Sit verò secundò punctum

punctum Z infra punctum M; erit tum recta PE major arcu PX; unde arc PA . PE $\sqsupset$ arc PA . PX :: PM . XZ — PM :: PM . XZ — EH :: PM . XE + XZ $\sqsupset$ PM . HZ. & vicissim PA . PM $\sqsupset$ PE . HZ. Verum ut priùs) est PA . PM :: PE . HK. ergò PE . HK $\sqsupset$ PE . HZ; proptereáque HK $\sqsubset$ HZ; rursus itaque liquet Punctum K extra curvam existere. Tota proinde recta MKZ extra curvam versatur; & eam tangit ad M: Q. E. D. In transcursu hoc. ad alias curvæ nostræ passiones revertamur. Fig. 27.

VII. Si tangenti cuipiam (ut ipsi MT) parallela ducatur quæpiam EF (à puncto nempe quopiam E in recta infra punctum T sumpto) hæc curvæ occurret.

Si enim infra punctum M in curva sumatur punctum quodlibet, & ab eo duci concipiatur curvam tangens recta; huic occurret tangens TM infra ordinatam PM. ergò recta EF eidem occurret; at curvam priùs transiliat oportet. ergò liquet Propositum. Fig. 28.

VIII. Eâdem operâ patet, si punctum assumptum E puncto T, & vertici A interjiciatur, rectumE F curvæ bis occursuram, tam supra quàm infra contactum M.

Operosè connisus est *Apollonius* hæc de *Sectionibus Conicis* ostendere. Con. I. 27, 28.

Cæterùm ad penitus determinandos occursuum locos *Specialis modus seu ratio motuum descendentis atq; transversi cognosci debet*; tunc eos *Analysis* statim prodet.

IX. Si duæ rectæ quævis (HM, KN) ad curvam propositam æqualiter inclinentur (hoc est æquales cum ejus ad occursus tangentibus (puta cum ipsis MT, NX) angulos efficiant) hæ extrorsum divergent, seu ad partes EF productæ concurrent. Fig. 29.

Nam ducatur subtensa NM; hæc utiq; secundum antedicta cum ipsa AZ conveniet, puta ad O. Est ergò ang OMH $\sqsupset$ (ang. TMH = ang. XNK $\sqsupset$) ang. ONK. ergo ang. HMN + MNK $\sqsubset$ 2 rect. ergò rectæ HM, KN concurrunt ad partes EF. Limitandum est hoc, intelligendò pares angulos HMA, KNA ad easdem partes versari; seu alterum alteri fore externum interno. alias cotnrà eveniet.

X. Si fuerit recta HM *curvæ* perpendicularis (hoc ejus tangenti MT) & in hac sumatur quæpiam definita HM; erit HM minima rectarum omnium, quæ à puncto H duci possunt ad curvam. Fig. 30. Apoll. V. 38 &c.

Ducatur

Ducatur enim quævis H O ; hæc tangenti priùs occurret, puta ad R. liquet H R majorem esse quàm H M ; multóq; magìs esse H O $\sqsubset$ H M,

XI. Hinc *Circulus Centro* H per M descriptus *curvam* continget.

XII. Etiam inversè, si H M minima sit omnium quæ ab H ad curvam duci possunt, erit H M curvæ perpendicularis.

Nam quoniam H M minima ponitur, circulus centro H, intervallo quovis H S, majori quàm H M, curvam secabit, & proinde tangentem M T, hanc puta in R. ergò quum sit H R $\sqsubset$ H M, non erit angulus H R M rectus. idem de punctis omnibus in recta T M evidens est. ergò tangenti perpendicularis non alibi quàm in punctum M cadit.

Fig. 31. XIII. Quinetiam si recta H M minima sit omnium quæ ab H duci possunt, eiq; perpendicularis sit recta T M; hæc curvam tanget.

Nam tangat alia, (si fieri potest) X M ; erit igitur X M ad H M perpendicularis. Unde pares erunt anguli H M X , H M T , totum & pars Q. E. A.

Fig. 32. XIV. Dico porrò minimæ H M propiorem H N remotiore H O minorem esse.

Nam ducatur subtensa M N ; hæc producta curvam transgredietur, & ipsam H O secabit, puta in R. & quoniam Angulus H M R obtusus est (major illo nempe, quem tangens cum H M constituit ad M) erit H N R magìs obtusus, adeòq; recta HR$\sqsubset$HN & magìs HO$\sqsubset$HN.

XV. Hinc perspicuum est Circulum quemvis Centro H descriptum, uno tantùm ad easdem puncti M partes puncto curvæ occurrere; nec omnino pluries igitur, quam in duobus punctis.

Fig. 33. XVI. Perpendiculari H M parallelæ sint rectæ I N, K O ; harum propior I N remotiore K O rectiùs incidet.

Nam per N, O ducantur ipsi curvæ perpendiculares E N, F O ; hæ cum ipsa H M intra curvam convenient, puta ad R, & P ; sibi verò ipsis in Q.

Liquet jam esse ang. F O K = ang. F P H $\sqsubset$ ang. P R Q = ang. N R H = ang E N J. Cùm ergò sit ang. F O K major angulo E N J, liquet propositum. XXXVII.

XVII. Si à puncto quopiam H in perpendiculari H M assumpto ducantur ad curvam rectæ H N, H O; harum propior H N, remotiore H O rectiùs incidet.

Nam ducantur E N, F O curvæ perpendiculares, & I N, K O ad ipsam H M parallelæ. Est igitur ang. F O K $\sqsubset$ ang. E N I. Item ang. O H M $\sqsubset$ ang. N H M. hoc est ang. K O H $\sqsubset$ ang. I N H. quare ang. F O K + K O H $\sqsubset$ ang E N I + I N H. hoc est ang. F O H $\sqsubset$ ang. E N H. Unde constat Propositum. Fig. 34.

XVIII. Hinc patet à perpendiculari progrediendo, (ab uno nempe puncto H) incidentium *obliquitatem* crescere, donec ad illam devenitur, quæ *curvam* tangit, omnium obliquissima.

XIX. Porrò si introrsum jam sumatur punctum H, & ab eo incidens H M sit omnium curvæ incidentium minima; erit H M *curvæ* perpendicularis, seu tangenti M T. Fig. 35.

Nam dic aliam M R tangenti perpendicularem esse. ergò H R $\sqsupset$ H M. & magìs H O $\sqsupset$ H M. quare H M non est minima contra *Hypothesin*. Apoll. V. 32.

XX. Item si recta HM sit omnium ab H curvæ incidentium *maxima*, erit H M curvæ perpendicularis. Apoll. V. 29.

Nam Circulus Centro H per M descriptus extra curvam totus cadet. ergò si recta M T Circulum tangat, hæc magìs extra curvam cadet, eámq; proinde continget. Est autem ang. H M T rectus. ergò liquet. Fig. 36.

XXI. Hinc si M T sit minimæ vel maximæ H M perpendicularis; hæc *curvam* tanget. Apoll. V. 30, 39.

Nam si dicatur alia M X tangere; erit ideò ang. X M H rectus, & par angulo T M H: Q. E. A.

XXII. Exhinc si recta Y M non sit curvæ perpendicularis; in ea nulla sumi potest *maxima*, vel *minima*.

Nam si sumi posset, esset ex eo ipso Y M curvæ perpendicularis contra *Hypothesin*. Apoll. V. 31, 47.

XXIII. Si H M sit incidentium minima, & intra ipsam sumatur punctum quodpiam I; erit etiam I M minima. Apoll. V. 30.

Fig. 37. Cùm enim *circulus centro* H per M descriptus *curvam* intròrsum tangat, etiam magìs *circulus centro* I *descriptus* introrsum tangat. unde liquet.

XXIV. Etiam si HM sit incidentium maxima, & extra ipsam accipiatur punctum quodpiam I, erit IM maxima.

Cùm enim *Circulus Centro* H *per* M *descriptus curvam* extrorsum contingat, etiam potiori jure *Circulus Centro* I *per* M *descriptus eandem extrorsus continget*. unde constat *Propositum*. Apoll. V. 39.

Cæterùm *minimarum* & *maximarum propior determinatio pendet ex speciali curvæ natura*.

De hac autem Tabula jam manum auferemus; nec enim impræsentiarum hujusmodi pleraq; complecti profitemur. Instituto nostro sufficit hactenus generalis cujusdam curvarum proprietates comprehendentis Doctrinæ *specimen* exhibuisse: qualis certè, plenior & perfectior, *haud exiguum videtur rebus Geometricis* (quæ nempe circa *curvarum proprietates & affectiones* plurimùm occupantur) *compendium allatura*. Nè dicam culpæ agnatum videri, *Logicæq;* Regulis haud admodum congruere, quæ toti cuipiam generi conveniunt, & quæ de communi quadam origine manant, ea quibusdam partibus adscribere, vel ex angustiori fonte derivare. *Plura* forsan, & *abstrusiora* proferemus aliquando. Nunc his supersedemus.

LECT. VI.

LECT. VI.

AD easdem partes vergentium curvarum, è communi quadam generatione deductas, generales aliquot affectiones jam antea dudum exposui; illas præsertim, quas à veteribus *Geometris* observaram specialibus, quas ipsi tractant, curvis applicari. Jam non ingratum facturus videor, si complures alias (abstrusiores quidem illas, at non injucundas prorsus, aut inutiles) apposuero; pro meo more quàm conciciſſimè demonstratas, eâ tamen ratione quoad potero, quæ cumprimis scientifica videtur, hoc est quæ nedum conclusionum veritatem asserit, at fontes etiam aperit, unde illa promanat. Versantur autem præcipuè quæ proferemus, partim *circa tangentium absque calculi molestia vel fastidio investigationem simul ac demonstrationem expeditam* (è simplicioribus nempe vulgatioribúsque perplexiora minúsque perspecta deducendo) *partim circa multarum magnitudinum dimensiones, tangentium designatarum ope, quam promptissimè determinandas*; quæ materiæ cùm præ Geometricis aliis quodammodo difficiles videntur, tum non penitus adhuc (sicut aliæ quædam) occupatæ vel exhaustæ sunt, ad hunc saltem modum quod sciam nondum tractatæ Quin è vestigio rem aggredimur, *Lemmatica* quædam utcunque, quorum in reliquis clariùs & breviùs ostendendis aliquem prospicimus usum, prælibantes.

II Sit *angulus rectilineus* A B C, & datum punctum D, sit item linea O D O talis, ut per D ductâ quâvis rectâ D N; sit anguli lateribus intercepta M N æqualis à puncto D, & linea O D O interceptæ D O; erit linea O D O *Hyperbola*. Fig. 38.

Nam ducatur D L ad C B parallela occurréntq; ipsi A B in L; & in protracta B L sumatur L Z = L B; ducatúrq; Z S ad B C parallela; item ducatur O K ad B Z parallela. Et ob positam D O = M N; erit H O = B N; ergò quum sit D H . H O :: (D L . L N :: D L — D H.

DH.LN—HO :: LH.LB ::) LH.HK. erit DH × HK = HO × LH; hoc est DL × HK — LH × HK = KO × LH—HK × LH. unde erit DL × HK = KO × LH. vel ZL × LD = ZK × KO. ergò constat lineam ODO esse *Hyperbolen*, cujus *Asymptoti* ZA, ZS. Breviùs hoc ostendi posset, producendo rectam NDS. Nam est DS = DM = DO ± OM = NM ± OM = ON. Similiter quartam & nonam brevius demonstres licet.

Fig. 38. Quinimò si MN ad DO quamvis eandem perpetuò rationem ponatur habere (puta datam R ad S) etiam linea ODO *Hyperbola* erit; Nempe si tum fiat R.S :: LB.LZ; & R.S :: DL.DE; & per Z ducatur ZS ad BC; ac per E transeat RE ad ZA parallela, cum ZS conveniens in Y; erunt YR, YS dictæ *Hyperbolæ asymptoti* quod jam sufficerit innuisse.

Hinc in transcursu noto facilè confici *Problema (quo problematum confectiones istæ Archimedeæ, ac Vieteæ ope primæ Conchoidis peractæ, ad Sectiones conicas rediguntur)* Per datum punctum D rectam lineam ducere, sic ut anguli dati ABC lateribus intercepta ductæ rectæ pars æquetur datæ T. Nam descriptâ hyperbolâ ODO; centro D, intervallo datam T æquante describatur circulus POQ *hyperbolam* intersecans in O; & producatur DON; fietq; MN = DO = T. Modus autem hic generalior est, & concinnior eo, quem in *Opticis* tradidimus.

Fig. 39. IV. Sit angulus ABC, et punctum datum D, sit etiam linea OBO talis, ut per D ductâ quâpiam rectâ DN, sit anguli lateribus intercepta MN ad rectâ BC curvâque OBO interceptam MO in eadem semper ratione (puta X ad Y;) erit linea OBO *hyperbola*.

Fig. 39. Ducatur enim recta DL ad CB parallela, ipsi AB occurrens in L; secenturque DL, BL punctis E, F, ut sit DL.DE :: X.Y :: BL.BF; tum per E ducatur recta ER, ad BA; & per F recta FS ad BC parallela; concurrántque rectæ ER, FS puncto Z; denuò per punctum O ducatur OH ad AB parallela. Jam ob DL.DH :: LN.HO :: LB + BN.HO :: DE × LB + DE × BN.DE × HO. item DL × KO = DE × BN (nam DL.DE :: MN.MO :: BN.KO) & DE × LB = DL × BF (ob DE.DL :: BF.LB;) erit DL.DH :: DL × BF + DL × KO.DE × HO; hoc est DL × BF + DL × KO.DH × BF + DH × KO :: DL × BF + DL × KO.

DE

DE × HO ergò DH × BF + DH × KO = DE × HO; hoc eſt DH × BF + DH × HO — DH × BL = DE × HO; tranſponendo igitur eſt DH × HO — DE × HO = DH × BL — DH × BF. hoc eſt EH × HO = DH × FL; vel EH × GO + EH × HG = DE × FL + EH × FL; quare; demptis æqualibus, eſt EH × GO = DE × FL; vel ZG × GO = DE × FL; cum itaque DE × FL ſit quid determinatum, conſtat lineam OBO eſſe hyperbolam, cujus aſymptoti ZR, ZS. Fig. 39.

V. Si MO capiatur ad alteras rectæ BC partes, etiam DE. BF ad alteras punctorum D, B partes accipi debent; uti Schema monſtrat; nec abludit modus demonſtrandi. Fig. 40.

VI. Conſectarium. Si recta BQ angulum ABC ſecet, pérque punctum D ducantur utcunque duæ rectæ MN, XY rectam BQ interſecantes punctis OP (quorum utique ſit O propius ipſi B) erit MN.MO ⊐ XY.XP. Nam per O deſcripta concipiatur *hyperbola* VOB (qualem jam mox attigimus, ſic ut interceptæ rationem habeant illam quam MN ad MO) erit igitur MN.MO::(XY.XV) ⊐ XY.XP. Fig. 41.

Coroll. Dividendo eſt NO.MO ⊐ YP.PX.

VII. Quinimò ſi plures lineæ BQ, BG angulum ABC ſecent; & à puncto D projiciantur rectæ DN, DY (quæ rectas alteras interſecant ut vides; quarúmque DN puncto B vicinior;) erit NE.MO ⊐ YF.VX. Fig. 42.

Nam NE.EO ⊐ YF.FV; & EO.OM ⊐ FV.VX. igitur ex æquo eſt NE.OM ⊐ YF.VX. ||

VIII. Etiam exindè patet, per B (ad partes alterutras) rectam duci poſſe; ità ut è D eductarum partes ab illa rectáque BC ad interceptas à rectis BA, BC rationem habeant minorem quâpiam datâ.

Nam ſumatur PQ = PZ; ergò connexa BQ *hyperbolam* OBO tangit; & liquet à rectis BQ, BC interceptas ad interceptas à BC, BA minorem rationem habere, quam habent interceptæ ab hyperbolâ OBO & recta BC ad eaſdem; hoc eſt minorem datâ quâpiam.

IX. Sit rurſum angulus rectilineus ABC, & punctum D; item linea Fig. 43.

Fig. 43. linea O O O talis, ut si è D utcunque ducatur recta D O, secans anguli latera punctis M, N, habeat D M ad N O semper eandem rationem (puta X ad Y) erit etiam linea O O O hyperbola.

Nam ducatur D L ad B C parallela; sitque D L . D E :: X . Y; & per E ducatur E R ad A B parallela; secans B C in Z; demum per O ducatur O H ad B A parallela.

Est jam D L . D E :: D M . N O :: L M . G O (ob similia triangula D L M, N G O) :: L M × D H . G O × D H item D L × H O = L M × D H (ob D L . L M :: D H . H O) quare D L . D E :: D L × H O . G O × D H hoc est D L × H O . D E × H O :: D L × H O . G O × D H adeóq; D E × H O = G O × D H. hoc est D E × H G + D E × G O = G O × D E + G O × E H quare (communi sublato) est D E × H G = G O × E H; seu D E × H G = G O × Z G. Patet itaque curvam O O O esse *hyperbolam* cujus *asymptoti* Z R Z C.

Coroll. Si ratio data sit æqualitatis (ceu D M = N O,) ipsæ A B, C B asymptoti erunt.

Sequentia quædam, quia magis id perspicuum videtur, Algebricè monstrabimus.

Fig. 44. X. Esto positione data recta I D, in qua punctum designatum D, sit item curva D N N talis ut in I D sumpto quopiam puncto G, & ductâ rectâ G N ad positionem datam I K parallelâ, tum adsumptis determinatis rectis m, b; positisq; D G = x, & G N = y; sit constantèr $my + xy = \frac{m}{b}xx$; erit linea D N N *hyperbola*; quæ sic determinatur; sumantur D M, & D O (hinc indè) pares ipsi m; & per M ducatur M L ad I K parallela, factoq; $b . m :: m$. M Q; sit M Z = 2 M Q = $\frac{2mm}{b}$; tum per Z, O traducatur recta Z T; erunt Z M, Z T asymptoti.

Ducatur enim Z S ad M O parallela, cui occurrat N G in R (quæ & ipsam Z T secet in P). & connectatur D Q. Est ergò P N = R G + G N − R P. Verùm est M D . M Q :: Z R (M G) . R P; hoc est $m . \frac{mm}{b} :: m + x$. R P $= \frac{mm}{b} + \frac{mx}{b}$. adeóq; R G − R P $= \frac{mm}{b} - \frac{mx}{b}$. ergò P N $= \frac{mm - mx}{b} + y$. Unde P N × M G $= \frac{m^3}{b} + my + xy - \frac{mxx}{b}$. Verùm (ex hypothesi) est my +

$+xy - \frac{mxx}{b} = 0$. ergò $PN \times MG = \frac{m^3}{b} = MD \times ZQ$. vel $PN . ZQ :: (MD . MG ::) QD . ZP$. Quapropter est $PN \times ZP = ZQ \times QD$. Unde palàm est curvam DNN esse *hyperbolam*, cujus asymptoti ZM, ZT. Fig. 44.

XI. Notetur; si æquatio sit $my - xy = \frac{m}{b}xx$; eadem habebitur *hyperbola*; tunc solùm puncta G ad partes DM sumuntur. Quin & si æquatio sit $xy - my = \frac{m}{b}xx$; puncta G ultra M capiendo, proveniet *hyperbola*, huic ipsi *conjugata*.

XII. Sit Triangulum BDF; & linea DNN talis, ut ductâ utcunque RN ad BD parallelâ (quæ lineas BF, DF, DNN secet punctis R, G, N) connexâque rectâ DN; sit perpetuò DN proportione media inter RN, NG; erit linea DNN *Hyperbola*. Fig. 45.

Per D ducatur DK ad DB perpendicularis (secans ipsam RN in E) & sit FH ad DB parallela; vocentúrque $DB = b$; $DF = d$; $FH = f$; tum $DG = x$; & $GN = y$; Estque $d . f :: x . \frac{fx}{d} = GE$; unde $\frac{2fxy}{d} + xx + yy = 2EG \times GN + DGq + GNq = DNq$. Porrò est $d . b :: FG . GR :: d - x . RG = b - \frac{bx}{d}$. Unde $RN = b - \frac{bx}{d} + y$. Et ideò $by - \frac{bxy}{d} + yy = RN \times NG = DNq = \frac{2fxy}{d} + xx + yy$. quare $by - \frac{bxy}{d} = \frac{2fxy}{d} + xx$. quam æquationem ordinando fit $\frac{db}{2f+b}y - yx = \frac{d}{2f+b}xx$. quòd si ponatur $m = \frac{db}{2f+b}$; erit $my - xy = \frac{m}{b}xx$. Unde liquet DNN esse *hyperbolam*, qualis habetur in præcedente determinata,

Not. Si angulus DGN rectus fuerit, evanescente tum $f = 0$, erit

 $d =$

$d = m$, vel $dy - xy = \frac{d}{b}xx$. Aliaquædam hìc (nonnulla forsan παρέργως) inseremus.

Fig. 46. XIII. Sit positione data recta I D; sit item curva D N N talis, ut in I D sumpto puncto quopiam G, ductâque rectâ G N ad positionem datam I K parallelâ; sumptísque determinatis lineis g, m, r; positísque $DG = x$, & $GN = y$; sit perpetim $yx + gx - my = \frac{m}{r}xx$; linea D N N erit *hyperbola*, sic determinabilis: Sumatur $DM = m$; & per M ducatur M L ad I K parallela; & in hac accipiatur $MQ = \frac{mm}{r}$; & sit $QY = MQ$; & ab M Y auferatur $YZ = g$; connexâque Q D, ducatur Z T ad Q D parallelâ; erunt Z M, Z T *asymptoti*.

Nam ducatur Z S ad M D parallela; cui occurrat G N producta in R (sed & G R ipsam Z T secet in P). Estque jam $PN = RG - RP - GN = \frac{mm}{r} - g + \frac{mx}{r} - y$. adeoque $PN \times MG = \frac{m^3}{r} - mg + yx + gx - my - \frac{m}{r}xx = \frac{m^3}{r} - mg + o. = \frac{m^3}{r} - mg = DM \times ZQ$. unde $PN . ZQ :: (DM . MG ::) QD . ZP$. ergò $PN \times ZP = ZQ \times QD$. Liquet igitur curvam D N N esse *hyperbolam*, cujus *asymptoti* Z M, Z T.

Si æquatio sit $-yx + gx + my = \frac{m}{r}xx$; eadem erit *hyperbola*. Sed puncta G inter B, M tunc accipiuntur; & ità prout aliis ac aliis locis puncta G designantur, æquationis signa variantur; at non est ea jam exponendi locus.

XIV. Positione datæ sint rectæ D B, B A; perque rectam D B
Fig. 47. feratur recta C X ad B A parallela; item per punctum D rotando transeat recta D Y, sic ipsam B A secans in E, ut sit inter rectas B E, D C eadem semper proportio (puta quæ cujusdam assignatæ R ad D B) rectæ verò D E, C X se intersecent punctis N; erit linea D N N *Parabola*.

Nam sit $R . DB :: DB . P$. Est ergò $BE . DC :: DB . P$. Item est $DB . BE :: DC . CN$. ergò $DB . BE + BE . DC = DC . CN$

$CN + DB.P.$ hoc eſt $DB.DC :: DC \times DB.\ CN \times P.$ hoc eſt $DB \times DC.\ DCq :: DC \times DB.\ CN \times P.$ Quapropter eſt $DCq = CN \times P$; ergò patet *curvam D N N eſſe parabolam*, cujus *parameter* P, *vertex* D; *diameter* ipſi B A parallela.

Dedit hoc *Gregorius* à S. *Vincentio*,* ſed operoſâ (ſi probè memini) prolixitate, demonſtratum.

* *In Lib. de Spirali.*

XV. Adjicimus; Si reliquis iiſdem poſitis, ità ferantur C X, & D Y, ut jam ſemper habeant B E, B C rationem eandem (puta quam B D ad R) erunt etiam interſectiones ad *parabolam*. Fig. 48.

Nam biſecetur D B in G, ducatúrque G V ad B E parallela, ſecans curvam D N N in V; & quoniam eſt $BC.R :: BE.BD :: CN.CD.$ erit $BC \times CD = R \times CN$. ergò (ſecundum benè notam *parabolæ proprietatem*) eſt curva D N N *parabola*, cujus *parameter* R, *diameter* G V.

Proletaria ſunt forſan iſta; ſed non perinde notata occurunt hæc:

XVI. Si reliquis ſimiliter poſitis, recta C X non jam ad ipſam BA, ſed ad aliam poſitione datam (D H) feratur parallela; ſitque perpetuò $BE.DC :: DB.R$; erunt *interſectiones* N ad *hyperbolam*. Fig. 49.

Nam ductâ N G ad B A parallelâ, nuncupentur $DB = b.\ BH = b$; $DG = x.\ GN = y.$ Eſtque $x.y :: b.\ \frac{by}{x} = BE.$ item $b.\ b :: y.\frac{by}{b} = GC.$ quare $CD = x - \frac{by}{b}$. Eſt igitur (ex hypotheſi) $\frac{by}{x}.\ x - \frac{by}{b} :: b.r$; unde talis ordinabitur æquatio; $yx + \frac{bry}{b} = \frac{b}{b}xx.$ ponendóq; $\frac{br}{b} = m$; erit $yx + my = \frac{m}{r}xx$; eſt ergò curva D N N *hyperbola*,* quæ ſuprà habetur determinata.

* *In 10 hujus.*

XVII. Quinetiam ſi (reliquis, ut in præcedente, ſuppoſitis) ità jam feratur C X, ut ſemper habeat B E ad B C rationem eandem, quam B D ad R; erunt itidem interſectiones N ad *hyperbolam*.

Nam ductâ N G ad A B parallelâ, nominentur rectæ, ut in præeunte; èſtque jam $BC = b - x + \frac{by}{b}$; atque $\frac{by}{x}.\ b - x. +$

 by

$\frac{by}{b}$ :: $b . r$. unde talis emerget æquatio: $yx + bx - \frac{br}{b}y = \frac{b}{b}$

Fig. 50, 51, 52. xx; hoc est (posito $\frac{br}{b} = m$) $yx + bx - my = \frac{m}{r}xx$; Est igitur curva B N N *hyperbola*, qualem superiùs exhibuimus determinatam.

XVIII. Datæ positione sint rectæ D B, B A; (& in D B designetur punctum D) sitque linea D N N talis, ut ductâ utcunque G N

Fig. 53. ad B A parallelâ; sumptis verò determinatis g, r, vocatisque D G $= x$; & G N $= y$, sit $ry - yx = gx$; erit linea D N N *hyperbola*, sic determinanda.

Capiatur D E $= r$, & B O $= g$; & per E ducatur recta E R ad B A, ac per O recta O S ad B D parallelæ; erunt Z R, Z S *asymptoti*.

Nam ductâ N P ad D B parallelâ, est Z P $= g + y$; & P N $= r - x$; quare Z P × P N $= gr - gx + ry - yx$. Verùm ex hypothesi est $- gx + ry - yx = 0$. ergò Z P × P N $= gr =$ Z E × E D. undè liquido constat Propositum.

Quòd si fuerit æquatio $xy - ry = gx$; sumenda est D E $= r$; & B O $= g$ (infra rectam D B) ductisque, ceu priùs, parallelis S Z R; erit *hyperbola* N N N angulo S Z R comprehensa; quod eodem facilè comprobatur modo.

XIX. Datæ positione sint rectæ D B, B A; ac ità ferantur rectæ F X ad D B parallela, ac D Y per punctum designatum D transiens, ut sit semper ratio ipsius B E ad ipsam B F æqualis assignatæ D B ad R; erunt rectarum D Y, F X interfectiones ad lineam rectam.

Nam per N ducatur G K ad B A parallela; estque D B . D G :: B E . G N :: B E . B F :: B D . R. itaque semper est D G $=$ R. Patet igitur factâ D G $=$ R, & ductâ G K ad B A parallelâ, interfectiones omnes ad hanc existere.

XX. Quòd si reliquis similiter positis; sumpto autem alio in B A puncto O; ab hoc sumatur computandi initium; ut nimirùm sit perpetuò B E, O F :: D B . R; erunt interfectiones N ad *hyperbolam*.

Nam ductâ N G ad A B parallelâ, sit D B $= b$; O B $= g$; D G $=$

$= x$; $GN = y$. ergò $BE = \frac{by}{x}$; & $OF = g + y$; ergò $\frac{by}{x}$. $g + y :: b . r$; hinc autem æquatio $ry - yx = gx$. unde DNN est *hyperbola* suprà mox determinata.

Quòd si punctum O sumatur infra DB; fiet æquatio $yx - ry = gx$. unde rursus constat.

XXI. Quinetiam, reliquis similiter positis, recta FX non jam ipsi DB, sed alteri DH feratur parallela; ità ut assumpto in BA puncto habeat semper BE ad OF rationem assignatam (DB ad m) erunt interfectiones N itidem ad *hyperbolam*. Fig. 54.

Nam ducatur NG ad AB parallela; vocentúrque $DB = b$; $HB = f$; $HO = g$; $DG = x$; $GN = y$; est ergò $x . y :: b . \frac{by}{x} = BE$; & $b . f :: x . \frac{fx}{b} = GK$; quare $NK\ (FH) = y + \frac{fx}{b}$ & $OF = y + \frac{fx}{b} - g$. Est ergò $\frac{by}{x} . y + \frac{fx}{b} - g :: b . m$. unde resultat æquatio $my + gx - yx = \frac{f}{b}xx$. vel facto $f . b :: m . r$; est $my + gx - yx = \frac{m}{r}xx$. Constat igitur lineam DNN esse *hyperbolam*; qualis superiùs habetur determinata.

Notetur, Si computatio ab ipso puncto H. initium sumat, (hoc est sit $BE . HF :: DB . m$) evanescente tunc termino g; erit $my - yx = \frac{m}{r}xx$; unde quoque suprà habetur alia determinatio simplicior.

XXII. Esto triangulum ADB, & linea DYY talis, ut ductâ utcunque PM ad DB parallelâ, sit perpetuò $PY = \surd : PMq - DBq$; erit linea DYY *hyperbola*; cujus utique Centrum est A, *semidiameter* AD, (vel *asymptotos* AB) *semiparameter* autem P; faciendo $AD . DB :: DB . P$. Fig. 55.

Sit enim $TD = 2\ AD$. Estque $AD . P :: (ADq . DBq ::$ * $APq . PMq ::$ * $TP \times DP + ADq . PMq :: TP \times DP . PMq - DBq ::) TP \times DP . PYq$. vel $TD . 2P :: TP \times DP . PYq$. unde liquet Propositum. * 6. 2. Elem.

Corol.

Corol. Si YS tangat *hyperbolam* DYY; erit PMq.PYq:: PA.PS.

Nam est PMq.DBq::PAq.ADq::PA.AS. ergò per rationis conversionem est PMq.PYq::PA.PS.

Fig. 56. XXIII. Quòd si reliquis similiter positis, sit jam $PY = \sqrt{PMq + DBq}$; erit etiam linea YYY *hyperbola*; cujus nempe Centrum A; *Semidiameter* AF (parallela & æqualis ipsi DB) *Semiparameter* autem P, si fiat AF.AD::AD.P.

Nam ducatur YK ipsi AP parallela cum AF conveniens in K; Sitque FT = 2FA; estque AF.P::(AFq.ADq:: DBq.ADq::PMq.APq::PYq—DBq.APq::AKq—AFq.KYq::) TK×FK.KYq:: AF.P. unde constat Propositum.

Corol. Rursus, Si recta YS *hyperbolam* FYY tangat, erit PMq.PYq::PA.PS.

Nam AD est *Semidiameter* ipsi AF conjugata. unde PA.AS:: PAq.ADq::PMq.DBq. ergò PA.PS:: PMq.PMq + DBq::PMq.PYq.

Fig. 57. XXIV. Sit triangulum ADB, rectum habens angulum ADB; & curva CGD talis, ut ductâ quâcunque rectâ FEG ad DB parallelâ (quæ lineas expositas secet ut vides) sit aggregatum quadratorum ex EF, EG æquale quadrato ex DB; erit curva CGD *Ellipsis* cujus semiaxes AD, AC.

Nam sit AV = AD. Estque ADq.DBq (ACq)::AEq.EFq::ADq—AEq.DBq—EFq. Hoc est ADq.ACq:: VE×ED.EGq. unde liquet Propositum.

Nota, Tangat GT *ellipsin* CGD; est EFq.EGq::EA.ET.

Nam ob AE.AD::AD.AT. est AEq.ADq::AE.AT. unde AEq.ADq—AEq::AE.AT—AE. Hoc est EFq.DBq—EFq::AE.ET. hoc est EFq.EGq:: AE.ET.

Fig. 58. Sit *Angulus rectilineus* DTH, in cujus latere TD signetur punctum A. Sit item curva VGG proprietate talis, ut ductâ rectâ quâpiam EFG ad TD perpendiculari (quæ lineas TD, TH, VGG secet punctis E, F, G,) connexáque rectâ AF, sit EG = AF; erit linea VGG *hyperbola*.

Nam ducantur AP ad TH & VPC ad TD perpendiculares; item

item PO ad TE parallela. Estque $EFq = EOq (CPq) + OFq + 2 EO \times OF (+ 2 CP \times OF)$. Verùm ob $CP . CA :: OP . OF :: CE . OF$; est $CP \times OF = CA \times CE$; ergò $EFq = CPq + OFq + 2 CA \times CE$. item est $AEq = CEq + CAq - 2 CA \times CE$; quapropter est $EFq + AEq = CPq + CAq + OFq + CEq$. hoc est $EGq = (APq + PFq =) CVq + PFq$. vel $EGq - PFq = CVq$. Verùm est $CE . (PO) . PF :: CP . AP :: CP . CV$; unde $EGq - \frac{CVq}{CPq} CEq = CVq$; adeóque linea GVG est *hyperbola*, cujus centrum C; semiaxes CV, CP.

Not. Ductâ rectâ FQ ad TH perpendiculari, sumptáque $QR = AE$; & connexâ GR; erit GR *hyperbolæ* VGG perpendicularis; mihi præsta sis fidem; aut ipse rem ad Calculum exige; eò verba non profundam.

XXVI. Positione datæ sint rectæ AC, BD (se intersecantes in X) quas decusset recta AB; tum ductâ utcunque rectâ PKL ad AB parallelâ, (quæ rectas AC, BD secet punctis P, K) sit PL æqualis ipsi BK; erit linea ALL recta. Fig. 59.

Nam, (ductâ XQ ad BA parallelâ, est $AQ . AP :: (BX . BK ::) QX . PL$: ergò linea ALL est recta.

XXVII. Positione data sit recta AX, & punctum D; neque non linea DNN talis; ut per D ductâ quâcunque rectâ MN (quæ rectam AX secet in M, & lineam DNN in N) sit perpetim rectangulum ex DM, DN æquale dato (puta quadrato ex Z); erit linea DNN circularis. Fig. 60.

Nam ducatur DB ad AX perpendicularis; sitque $DB . Z :: Z . DE$, & connectatur NE; Est jam $DM \times DN = Zq = DB \times DE$, quare $DM . DB :: DE . DN$. ergò triangula DBM, DNE similia sunt; quapropter angulus DNE rectus est; itaque linea DNN est circularis; (ad circulum pertinens, *cujus Diameter* DE).

Vides nedum rectam & *hyperbolam*; sed & suo modo rectam ac *circulum* sibi lineas esse reciprocas. Verùm hîc, etsi præludiis nostris nondum absolutis, paulùm subsistamus.

LECT. VII.

Lect. VII.

ADhuc in *Vestibulo* hæremus; nec aliud quàm velitamus.

I. Sint duo quanta A, B; quorum majus A; adsumpto tertio quopiam X, erit A + X . B + X ⊐ A . B.

Nam ob X . A ⊐ X . B; erit componendo X + A . A . ⊐ X + B . B. vel permutando X + A . X + B ⊐ A . B.

II. In linea Y Z signentur tria puncta, L, M, N; & inter puncta L, N sumpto puncto quopiam E, alteróque G extra L N (versus Z);
Fig. 61. secetur E G in F, ut sit G E . E F :: N L . L M; cadet punctum F ad partes M Z:
* 1 hujus. Nam est N E . M E * ⊏ N L . M L :: G E . F E ⊏ N E . P E. ergo F E ⊏ M E.

III. Sint rectæ BA, DC parallelæ; item rectæ BD, GP parallelæ;
Fig. 62. pérque punctum B ducantur utcunque duæ rectæ B T, B S ipsam G P secantes punctis L, K, dico fore D S . D T :: KG . L G.

Nam est KG . LG = KG . GB + GB . LG = PK . PS + P T . P L = D B . D S + D T . D B = D T . D S.

IV. Esto triangulum B D T, basique D B parallelam quamvis P G intersecent per B ductæ quæpiam duæ rectæ B S, B R punctis L, K; dico fore L G × T D + K L × R D . K G × T D :: R D . S D.
Fig. 63 Sumantur enim B M = G P, & B N = L P; & B O = K P; unde constat junctas P M, P N, P O ipsis T B, S B, R B (respectivè) parallelas esse. Et quoniam est D M . P D :: D B . T D. erit D M × T D = P D × D B. Similiter est D N × S D = P D × D B. quare D M × T D = D N × S D = D M × S D + M N × S D, transponendóque DM × T D — D M × S D = M N × S D. Simili plané

discursu

discursu est $DM \times TD - DM \times RD = MO \times RD$. quapropter erit $MN \times SD . MO \times RD :: TD - SD . TD - RD$. hoc est Fig. 63.
$LG \times SD . KG \times RD :: TD - SD . TD - RD$; vel (ad æquationem redigendo) $LG \times SD \times TD - LG \times SD \times RD = KG \times RD \times TD - KG \times RD \times SD$; transponendóque $LG \times SD \times TD + KG \times RD \times SD - LG \times SD \times RD = KG \times RD \times TD$. hoc est $LG \times SD \times TD + KL \times SD \times RD = KG \times RD \times TD$. vel (ad analogismum reducendo) $LG \times TD + KL \times RD . KG \times TD :: RD . SD$. Quod erat Propositum.

V. Quòd si puncta T, R non ad easdem puncti D partes sita sint, erit $LG \times RD - KL \times TD . KG \times TD :: RD . SD$. Fig. 64.
Simili constabit id discursu; quem piget repetere.

VI. Sint quatuor continuè proportionalium series æquinumeræ (quales adscriptas cernis) quarum cùm antecedentes primi, tum ultimi consequentes inter se proportionales sint ($A . \alpha :: M . \mu$; & $F . \varphi :: S . \sigma$) erunt ejusdem ordinis quilibet accepti quatuor etiam inter se proportionales (puta nempe, $D . \delta :: P . \pi$).

A. B. C. D. E. F.

α. β. γ. δ. ϵ. φ.

M. N. O. P. R. S.

μ. ν. o. π. ρ. σ.

Sunt enim $A\mu$, $B\nu$, Co, $D\pi$, $E\rho$, $F\sigma$, & αM, βN, γO, δP, ϵR, φS, } Continuè proportionales.

Cùm igitur sit $A\mu = \alpha M$; & $F\sigma = \varphi S$, liquidum est fore $D\pi = \delta P$; ac idcircò $D . \delta :: P . \pi$. Ad utramque proportionalitatem (tam Arithmeticam quàm Geometricam) æquè spectat hæc Conclusio.

VII. Rectæ AB, CD parallelæ sint; hásque secet positione data BD; lineæ verò EBE, FBF ita relatæ sint, ut ductâ utcunque Fig. 65.
recta PG ad DB parallelâ; sit semper PF eodem ordine media proportionalis inter PG, PE; tum per quodvis designatum lineæ EBE punctum E transeat HE ipsis AB, CD parallela, sitque alia curva KEK talis, ut ductâ utcunque QL itidem ad DB parallelâ, sit QX

eodem ſemper ordine media inter QL, QI (eodem inquam illo, quo
Fig. 65. PF media fuerat inter PG, PE).: dico lineas FBF, KEK analogas eſſe; hoc eſt ordinatas (quales QR, QK) eandem perpetuò inter ſe rationem habere; eandem ſcilicet illi quam habet PF ad PE.

Hoc è Lemmate proximè præmiſſo conſectatur, uti patebit, ad ſubjectum Schema mentem advertendo.

QS *	QR *	QI.	Sunt ÷÷. unde QR. QK:: PF. PE.
QL *	QK *	QI.	
PG *.	PF *	PE.	
PE *	PE *	PE.	

Not. Pro lineis rectis AB, HE, CD ſubſtitui poſſent quælibet, etiam curvæ, parallelæ.

Fig. 66. VIII. Sint rurſus, in A concurrentes duæ rectæ AB, AD, rectaq; BD poſitione data; item duæ curvæ EBE, FBF ſic relatæ, ut ductâ utcunque PG ad DB parallelâ, ſit ſemper PF eodem ordine media proportionalis inter PG, PE; tum connexâ AE, ſit alia curva KEK talis, ut ductâ quâpiam rectâ QLI ad DB parallelâ ſit ſemper QK eodem ordine media inter QL, QI, quo fuit PF inter PG, PE; erit rurſus linea FEF ipſi KBK analoga; ſeu perpetim QR. QK:: PF. PE.

Nam QS * QR * QI.	ſunt ÷÷.	item QS. QL:: PG. PE.
QL * QK * QI.		Et QI. QI:: PE. PE.
PG * PF * PE.		ergò QR. QK:: PF. PE.
PE * PE * PE.		

Not. Pro rectis AB, AH, AD ſubſtitui poſſent tres quævis lineæ analogæ.

XI Item, ſit circulus AGB, cujus centrum D; aliæque duæ curvæ
Fig. 67. EBE, FBF tales, ut per D ductâ quâcunque rectâ DG, ſit perpetuò DF eodem ordine media proportionalis inter DG, DE; tum centro D per E deſcribatur circulus HE; ſitque præterea curva KEK talis, ut ductâ per D quâpiam (ad circulum HE) rectâ DL, ſit ſemper

DK

DK eodem ordine media inter DL, DI, quo fuerat DF inter DG, DE; erunt curvæ FBF, KBK analogæ, seu perpetuò DR . DK :: DF . DE.

Nam rursus DS. * DR. * DI.
DL. * DK. * DI.
DG. * DF. * DE.
DE. * DE. * DE.
} sunt ∺. unde DR . DK :: DF. DE.

Rursus, pro circulis aliæ lineæ parallelæ, vel analogæ substitui possent.

X. Sint denuò duæ lineæ quævis AGBG, EBE; & altera FBF sic ad istas relata, ut ductâ utcunque à designato puncto D rectâ DG, sit perpetuò DF eodem ordine media proportionalis inter DG, DE; tum adsumatur linea HEL lineæ AGB analoga (seu talis, ut per D utcunque ductâ DLS, sint perpetuò DS, DL in eadem ratione) sit denuo linea KEK talis, ut ductâ utcunque DL, sit perpetuò DK eodem ordine media inter DL, DI, quo priùs DF inter DG, DE; erit itidem linea FBF lineæ KEK analoga.

Rursus enim DS. * DR * DI.
DL. * DK * DI
DG. * DF * DE
DE. * DE * DE
} sunt ∺; { Et tam primi quàm ultimi quatuor termini sunt proportionales. Unde liquet Propositum.

XI. Sit Arithmeticè proportionalium Series A. B. C. D. E. F; in qua sumptis quibuscunque duobus terminis D, F; sit terminorum à primo A (exclusivè) ad ipsum D numerus, N; & terminorum ab A (itidem exclusivè) ad F, sit numerus M; erit A —: D . A —: F :: N . M.

Nam esto differentia communis, X. est ergò $D = A \pm NX$. & $F = A \pm MX$. quare $A —: D = NX$. & $A —: F = MX$. unde A —: D . A —: F :: (NX . MX ::) N . M.

XII. Hinc, si duæ fuerint ejusmodi series; & in utraque sumantur

 bini,

bini, eodem ordine sibi respondentes, termini (puta D, F in prima, & P, R in secunda) erit A —: D . A —: F :: M —: P . M —: R.

A. B. C. D. E. F.

M. N. O. P. Q. R.

Nam harum rationum utraque par est illi, quam habent ad se numeri N, M, quales in præcedente designati sunt.

Hi verò Numeri N, M vulgò terminorum, quibus aptantur, exponentes, aut Indices vocantur, in serie quavis proportionalium ; quales nos semper in sequentibus intelligimus, ubi literas has adhibemus.

XIII. Sint quælibet quanta A, B, C, D, E, F continuè proportionalia Arithmeticè ; nec non alia totidem, ab eodem termino A incipientia, Geometricè proportionalia ; sit autem illorum secundum B non majus horum secundo M ; erit quodlibet in serie Geometrica majus eo, quod ipsi coordinatur in serie Arithmetica.

A. B. C. D. E. F.

A. M. N. O. P. Q.

Est enim A + N ⊏ 2 M (vel ⊏) 2 B = A + C. ergò N ⊏ C. unde M + N ⊏ B + C = A + D. Est autem A + O ⊏ M + N. ergò A + O ⊏ A + D. Et ideò O ⊏ D. ergò M + O ⊏ B + D = A + E. Est autem A + P ⊏ M + O. ergò A + P ⊏ A + E ; adeóque P ⊏ E. similíque porrò discursu quoad velis.

XIV. Hinc, si rursus fuerint A, B, C, D, E, F ∸ Arithmeticè ; & A, M, N, O, P, Q sint ∸ Geometricè ; sitque ultimum F non minus ultimo Q ; erit B majus quàm M.

Nam si dicatur B non majus quàm M ; erit indè F minus, quàm Q contra hypothesin.

Item, iisdem positis ; erit penultimum E majus penultimo P.

XV. Nam si F = Q ; constat ex præcedente fore E ⊏ P (scilicet utramque seriem invertendo) sin F ⊏ Q ; potiori jure liquet fore E ⊏ P.

XVI. Quinimò demùm, iisdem positis, quodlibet in serie Arithmetica majus est coordinato quolibet in serie Geometrica ; puta, C majus est quàm N.

Est

Est enim E ⊏ P, ac indè D ⊏ O ; & hinc C ⊏ N.

XVII. Consectatur hinc ; si fuerint quatuor lineæ HBH, GBG, FBF, E B E sese intersecantes in B, ac ita versus se relatæ, ut ductâ utcunque rectâ D H ad positione datam D B parallelâ (in linea nempe D D D terminatâ) vel à designato puncto D projectâ D H ; sit perpetuò D G inter D H, D E eodem ordine media proportionalis Arithmeticè, quo D F inter easdem media Geometricè ; lineæ G B G, F B F sese mutuò contingunt. Fig. 68. 69.

Enimverò linea G B H extra lineam F B F totam cadere manifestum è præcedente.

XVIII. Ex isthinc etiam (quod strictim transcurrens moneo) diversis innumeris *Hyperbolarum*, aut *Hyperboliformium* generibus convenientes rectæ ἀσύμπτωτοι definiuntur. Sint nempe rectæ VD, BD positione datæ ; sint item aliæ duæ rectæ A B, V I ; ductâ verò liberè rectâ P G ad D B parallela, sit P φ constantèr inter P G, P E eodem ordine media proportionalis Arithmeticè, quo P F inter easdem media Geometricè ; quia jam (*a*) rectæ E G, E φ semper eandem obtinent rationem, est linea $\varphi\ \varphi\ \varphi$ recta ; verùm linea V F F est *hyperbola*, vel *hyperboliformis* aliqua (communis quidem vel *Apolloniana hyperbola*, si P F sit inter ipsas P G, P E simpliciter media, sed alia diversi generis quædam *hyperboliformis*, si P F sit alterius cujuspiam ordinis media) atqui patet è penultima præmissa lineam $\varphi\ \varphi\ \varphi$ eodem ordine respondenti lineæ V F F *asymptoton* esse. quod an πρόχειρον sit nescio, nobis certè πάρεργον fuit, hîc adnotâsse. Fig. 70. (*a*) 12 *hujus*.

XIX. A puncto assignato B ad datam positione rectam A C ductæ sint rectæ tres BA, BC, BQ ; tum in QC productâ sumatur sumptum quodpiam D ; per B recta (puta B R) duci potest (ad alterutras ipsius B Q partes) talis, ut à D projectâ quâcunque rectâ, ceu D N ; sit hujus à rectis B Q, B R intercepta pars (F E) minor ejusdem à rectis B A, B C interceptâ parte (N M). Fig. 71.

Nam, primò, si B R ultra angulum A B C jaceat respectu puncti D ; fiat Q R = C A ; & connectatur B R ; tum utcunque ducatur D E, rectas secans, ut vides ; & manifestum est, * è supra monstratis fore, F E ⊐ N M. * *Per* 7. Lect. VI.

Sin B Q citra angulum A B C cadat versus D ; (*a*) ducatur recta B H talis, ut à B Q, B H interceptæ minores sint interceptis à B Q, B A ; & sumatur H R = Q C ; & connectatur B R ; tum rursus utcunque ductâ D N, quæ rectas intersecet, ut exhibet Schema ; quo- * *Per* VI. 8 Lect. Fig. 72.

niam

(b) *Constr.* niam jam est KF (b) $\sqsupset$ NF; & KE * $\sqsubset$ MF; perspicuum est restare FE $\sqsupset$ NM.

Ita quidem ab una rectæ BQ parte recta BR duci potest, quæ minores ipsis MN intercipiat; (a) potest autem ab altera parte recta quoque duci, quæ minores intercipiat ipsis FE; unde totum liquet Propositum.

Fig. 73. XX. In recta DZ sint tria puncta D, E, F; & in F sit vertex anguli rectilinei BFC, cujus latera secet recta DBC; per E verò ducta sit recta EG; potest ab E recta duci (ceu EH) talis, ut à puncto D projectâ utcunque rectâ DK sit in hac à rectis EG, EH intercepta minor à rectis FC, FB interceptâ.

Ducantur ES ad FC, & ER ad FB parallelæ; & in primo casu, ubi punctum E puncto D vicinius est, (ob similitudinem triangulorum (a) 19. *hujus.* ENM, FKI) manifestum est fore MN $\sqsupset$ IK; (a) potest autem ab E duci recta (puta EH) talis, ut interceptæ PO minores sint interceptis MN; ergò liquet.

In altero casu, ubi punctum F ipsi D propius, sumatur SL æqualis Fig. 74. ipsi CB; & connectatur EL, Estque jam IK. MN :: FK. EN :: (c) *Constr.* DF. DE :: FC. ES :: BC. RS (c) :: LS. RS (d) $\sqsubset$ QN. (d) 6. Lect. VI. MN. quapropter est IK $\sqsubset$ QN. (a) potest autem ab E recta duci, ceu EH, sic ut ab EG, EH interceptæ OP minores sint interceptis QN. quamobrem abundè constat Propositum.

Fig. 75. XXI. Curvam BA tangat recta BO in B, sitque recta BO æqualis curvæ BA; sumpto tunc in curva puncto quopiam K connectatur recta KO; erit KO major arcu KA.

Nam, quoniam recta minimum est inter bina puncta intervallum, est BK + KO $\sqsubset$ BO = BK + KA. ergò KA $\sqsubset$ KO.

XXII. Hinc, utcunque sumptis (ad easdem contactûs partes) duobus punctis K, L, connexâque rectâ KL; erit KL + LO $\sqsubset$ KA.

Nam, supra contactum versus A, est KL + LO $\sqsubset$ KO $\sqsubset$ KA.

Infra verò, est KL + LB $\sqsubset$ KB (ex hypothesibus *Archimedeis*) adeóque KL + LO $\sqsubset$ KA.

LECT.

Lect. VIII.

Mihi sanè videor (videbor & vobis, opinor) quod irridebat *sapiens ille Scurra, perquam exiguæ Civitati portas ingentes extruxisse*. Nec enim adhuc aliud quàm ad rem aliquanto propiùs enitimur. ad illam.

I. Hæc adsumimus. Si duæ lineæ (OMO, TMT) sese contingant, angulos ipsæ comprehendunt (OMT) rectilineo quovis angulo minores. Et vice versâ: Si duæ lineæ (OMO. TMT) angulos contineant quovis rectilineo minores, illæ sese contingent (contingentibus saltem æquipollebunt). Fig. 76, 77.

Hujus *effati* rationem jampridem (ni fallor) attigimus.

II. Hinc; Si duas lineas OMO, TMT tertia quæpiam linea PMP contingat, ipsæ etiam lineæ OMO, TMT, sese contingent.

Nam quoniam lineæ OMO, PMP sese contingunt, erit angulus OMP quovis *rectilineo* minor. Item, ob linearum TMT, PMP *contractum*, erit *angulus* TMP quovis etiam *rectilineo* minor. Erit igitur angulus TMO *rectilineo* quovis minor. Unde lineæ OMO, TMT se mutuò contingent.

III. Tangat recta FA curvam FX in F; sitque positione data recta FE; sint item duæ curvæ EY, EZ tales, ut ductâ utcunque rectâ IL ad EF parallelâ (quæ lineas expositas secet, ut vides) sit semper intercepta KL æqualis interceptæ IG; etiam curvæ EY, EZ sese contingent. Fig 78.

Si non tangant, potest inter ipsas constitui angulus rectilineus, puta BEC; hunc utcunque secet ad FE parallela IL; sumatúrque GH = BC, & connectatur FH; sunt igitur è parallelis ad FE à rectis FG,

FG, FH interceptæ pares interceptis ab EB, EC; hoc est minores interceptis à curvis EY, EZ; hoc est minores interceptis à curva FX, & recta FA; quapropter angulus XFA rectilineo HFG major est; unde recta FA curvam FX non tangit, contra *Hypothesin.*

Fig. 79. IV. Itidem, Tangat recta FA curvam FX, & sint duæ curvæ EY, EZ tales, ut ab assignato puncto D utcunque ductâ rectâ IL (quæ lineas expositas secet ut vides) sit semper $KL = IG$; curvæ EY, EZ sese tangent.

(a) 10 Lect. VII. Nam, si neges, his interferatur *angulus rectilineus* BEC; quem utcunque a D projecta secet recta DL; (a) potest jam ab F recta duci (puta FH) talis, ut sint è projectis à D a rectis FG, FH interceptæ minores interceptis ab ipsis EB, EC, hoc est multo minores interceptis à recta EA, curvâque FX. Unde sequetur angulum AFX rectilineo GFH majorem esse; ac idcircò rectam AF non contingere curvam FX, adversus *Hypothesin.*

Hæ præcedentes duæ Conclusiones veræ sunt, & simili ratione demonstrantur, posito interceptas IG, KL quamvis ad se perpetim habere proportionem eandem. Parco verbis.

Proposuimus hæc, ut sequentium nonnulla à scrupulis muniantur.

V. Sit recta VEI, duæque curvæ YFN, ZGO sic ad se relatæ, ut ductâ utcunque rectâ EFG ad positione datam AB parallelâ, habeant interceptæ EG, EF semper eandem rationem inter se; tangat autem recta TG curvarum unam ZGO in G (cum recta VE conveniens in T) ducta TF alteram YFN quoque continget.

(a) Hyp. Nam utcunque ducatur recta IL (lineas expositas ut vides intersecans) Est igitur IL. IN (a) ⊏ IO. IN :: EG. EF :: IL. IK. Igitur IN ⊐ IK. ergò punctum K extra curvam YFN jacet; totáq; recta TF.

(b) Hyp. (c) Schol. 4. hujus. Aliter. Est IL. IK :: (IO. IN :: IK — IO. IK — IN ::) OL. NK, ergò cùm lineæ GL, GO se (b) tangant, (c) etiam lineæ FN, FK sese tangent.

Fig. 80. VI. Etiam si tres curvæ XEM, YFN, ZGO ità referantur ad se, ut ductâ utcunque rectâ EFG ad positione datam parallelâ, sint semper EG, EF in eadem ratione, concurrant autem duarum XEM, ZGO tangentes ET, GT in T; adjuncta TF curvam YFN tanget.

Nam

Nam (facto ut priùs) erit I L . I K : : E G . E F : : M O . M N.
* quapropter erit punctum K extra curvam Y F N. * 1. Lect.VII.

Possit hæc, ut præcedens, aliter ostendi ; sed verbis pluribus.

Curvas ità sitas concipe quales figura monstrat. nam συνολχίαν ego ac ἀδολεσχίαν fugitans casus præ cæteris obvios ac faciles arripiens propono. Hoc ubique subnotatum velim.

VII. Sit punctum datum D, curvæque duæ X E M, Y F N, ità relatæ, ut à D projectâ quacunque rectâ D E F, habeant ad se rectæ D E, D F rationem semper eandem ; unam verò Y F N tangat recta F S ; cui parallela sit E R ; tanget recta E R curvam X E M. Fig. 81.

Nam à D utcunque projiciatur recta D K (lineas intersecans, ut vides). Estque D K . D I : : D F . D E : : D N . D M ; ergò quum sit D K $\sqsubset$ D N ; erit D I $\sqsubset$ D M ; quare tota recta R E extra curvam X E M cadit.

Rectæ N K, M I rationem semper eandem obtinent ; unde res aliter constat.

VIII. Sint tres curvæ X E M, Y F N, Z G O tales, ut si ab assignato puncto D projiciatur utcunque recta DEFG, habeant interceptæ E G, E F rationem semper eandem (puta quam R ad S) tangant autem rectæ E T, G T curvarum duas (puta X E M, Z G O) in E, G ; oportet curvæ Y F N tangentem ad F designare. Fig. 82.

Concipiatur curva T F V talis, ut à D utcunque projectâ rectâ D M K L, (quæ secet rectas T E, T G punctis I, L, & istam curvam in K) habeant semper interceptæ I L, I K rationem eandem datæ R ad S ; (*a*) est igitur I K $\sqsubset$ I N ; quare curva T F K curvam Y F N tangit ; (*b*) est autem curva T F K *hyperbola* ; hanc tangat F S ; (*c*) illa quoque curvam Y F N tanget. (*a*) 1 Lect. VIII. (*b*) 4 Lect.VI. (*c*) 2. *hujus*.

Quoniam *hyperbolam* tangentis hîc primum injecta est mentio ; hujus (unà cum aliarum omnium consimili ratione procreatarum seu *reciprocarum linearum tangentibus*) *tangentem* ità definiemus.

IX. Sint V D recta linea, duæque curvæ X E M, Y F N ità relatæ, ut ductâ liberè rectâ E D F ad positione datam parallelâ, sit semper *rectangulum* ex D E, D F par eidem alicui spatio ; tangat autem recta E T curvam X E M in E, cum recta V D concurrens in T ; sumatúrque D S = D T ; & connectatur F S ; hæc curvam Y F N tanget ad F. Fig. 83.

Nam utcunque ducatur I N ad E F parallela ; lineas expositas secans,

cans, ut vides. Estque TP . PM $\sqsubset$ (TP . PI : :) TD . DE item SP . PK : : SD . DF. ergò TP × SP . PM × PK $\sqsubset$ TD × SD . DE × DF : : TD × SD . PM × PN. Verum TD × SD $\sqsubset$ TP × SP ; ac indè magis TD × SD . PM × PK $\sqsubset$ TD × SD . PM × PN. quare PM × PK $\sqsupset$ PM × PN ; vel PK $\sqsupset$ PN . Itaque recta FS extra curvam YFN tota jacet.

Not. Si linea XEM recta fuerit (utique ipsi TEI coincidens) erit YFN *hyperbola* vulgaris, cujus centrum T, *asymptotos* una TS, altera TZ ad EF parallela.

X. Quinetiam sit punctum D ; curvæque duæ XEM, YFN ità relatæ, ut per D ductâ quacunque rectâ EF ; sit perpetuo rectangulum ex DE, DF æquale cuidam quadrato (ex Z puta) ; unam verò curvam XEM tangat recta ER ; alterius ad F tangens ità determinatur: Ducatur DP ad ER perpendicularis: factóque DP . Z : : Z . DB ; bisecetur DB in C ; connexâque CF, ducatur FS ad CF normalis ; hæc curvam YFN tanget.

Fig. 84.

Nam centro C per F describatur *Circulus* DOB ; & per B trajiciatur utcunque recta IN lineas intersecans, ut vides ; estque DO × DI (*a*) = DP × DB (*b*) = Zq (*c*) = DM × DN vel DO . DM : : DN . DI . ergò quum sit DM (*c*) $\sqsupset$ DI ; erit DO $\sqsupset$ DN ; itaque circulus DOB curvam YFN tanget. Quare recta FS eandem YFN tanget.

(*a*) 17 Lect. VI.
(*b*) Constr.
(*c*) Hyp.

XI. Curvæ XEM, YFN tales sint, ut ductâ quâpiam FE ad positione datam parallelâ, sit semper hæc æqualis eidem alicui ; curvàm autem YFN tangat recta SF ; huic parallela RE alteram XEM continget.

Fig. 85.

Nam utcunque ductâ MK ad FE parallelâ est NI $\sqsupset$ (KI = FE =) NM. Quare punctum I extra curvam XEM jacet, *&c.*

Revera linea XEM nil aliud est , quàm ipsa YFN *translocata*. Levius hoc, & methodi tantùm gratiâ Propositum.

XII. Sit curva quæpiam XEM , quam tangat recta ER ad E ; sitem alia curva YFN ad alteram ità relata, ut ab assignato puncto D utcunque ductâ rectâ DEF, sit semper intercepta EF æqualis alicui determinatæ Z ; curvæ YFN tangens (ad F) ità designatur: Sumatur DH = Z ; & per H ducatur AH ad DH perpendicularis, ipsi ER occurrens in B, & per F ducatur FG ad AB parallela; sumatúrque GL = GB ; erit connexa LFS curvæ YFN tangens.

Fig. 86.

Nam

Nam *asymptotis* E R, A B per F descripta concipiatur *hyperbola* O F O; cui occurrat à D projecta quæpiam D O, lineas expositas secans, uti cernis. Estque Q O (a) = D P; (b) quare M O ⊏ D P (c) ⊏ D H (b) = M N. ergò *hyperbola* O F O curvam Y F N tangit. (a) Conversf. 9. Lect. VI. (b) Hyp. (c) Elem.

Verùm (d) recta L S *hyperbolam* O F O tangit; hæc itaque curvam Y F N quoque tanget. (d) 9. hujus

Not. Si X E M ponatur linea recta (vel ipsi E R coincidat) erit Y F N *Conchois* prima vulgaris, seu *Nicomedea*; hujus igitur tangens è generali ratione quâdam habetur determinata.

XIII. Sit recta L A, curváque quæpiam B E I; cum alia curva D F G talis, ut ductâ liberè rectâ P F E ad positione datâm quandam parallelâ, possit recta P E quadratum ex P F unà cum quadrato ex datâ Z; item curvam B E I tangat recta E T; tum fiat P E q. P F q :: P T. P S; connexa S F curvam D F G tanget. Fig. 87.

Nam concipiatur curva V F H talis, ut liberè ductâ Q K ad P E parallelâ (quæ lineas expositas secet ut vides) sit perpetuò Q K q = Q H q + Z q; unde quoniam est Q K (a) ⊏ Q I, erit Q K q — Z q ⊏ Q I q — Z q; hoc est Q H q ⊏ Q G q; ergò curva V F H curvam D F G tanget ad F; (b) est autem curva V F H *hyperbola*, quam (c) tangit recta S F. hæc itaque curvam D F G quoque continget. (a) Hyp. (b) 22. Lect. 6. (c) Cor. 22. Lect. I.

XIV. Cætera ponantur eadem; at jam P E unà cum quadrato ex data Z possit quadratum ex P F; fiatque P E q. P F q :: P T. P S; & connectatur F S; hæc rursus ipsam G F G continget. Fig. 88.

Similis est demonstratio; sed adhibe 23am primæ Lectionis.

XV. Sint curvæ duæ A F B, C G D, communem habentes *axem* A D, ac ità versus se relatæ, ut ductâ quâcunque rectâ F E G ad A D perpendiculari (quæ rectas expositas secet ut vides) sit summa quadratorum ex ipsis E F, E G æqualis quadrato ex determinata recta Z; tangat autem recta F R ex his curvis unam A F B; & fiat E F q. E G q :: E R. E T; connexa G T curvam C G D quoque tanget. Fig. 89.

Concipiatur enim curva O G O talis, ut ductâ rectâ K Q O (quæ rectas F R, E R secet punctis K, Q, curvam O G O in O) sit Q K q + Q O = Z q, erit ideò Q K q + Q O q = Q I q + Q L q; & cùm sit Q K q (a) ⊏ Q I q, erit ideò Q O q ⊐ Q L q. itaque curva O G O curvam C G D (introrsum) tangit. (b) Est autem (ex ostensis) (a) Hyp. (b) 24. Lect. VI.

ostensis) curva O G O *Ellipsis*, quam recta G T tangit. ergò recta G T curvam C G D quoque tanget.

Fig. 90.

XVI Sit curva quæpiam A F B (cujus axis A D, & ad hunc applicata D B) sit etiam alia curva V G C ad istam sic relata, ut à designato quodam in axe A D puncto Z ad curvam A F B utcunque ductâ rectâ Z F, & per F ductâ rectâ E F G ad D B C parallelâ, sit E G æqualis ipsi Z F; sit autem P Q perpendicularis curvæ A F B; sumatúrque Q R æqualis ipsi Z E; connexa recta G R ipsi curvæ V G C perpendicularis erit.

Nam ducatur F T ad ipsam F Q perpendicularis, seu curvam AFB tangens; & concipiatur curva O G O talis, ut ductâ quâcunq; rectâ H K O ad E F G parallelâ (quæ rectas T E, T F, & curvam O G O secet punctis H, K, O) connexâque Z K, sit H O = Z K; tum ductâ Z I, quoniam H K (a) ⊏ H I, erit Z K ⊏ Z I, vel H O ⊏ H I; quare curva O G O curvam V G C tangit. (b) Est autem O G O (ex ostensis) *Hyperbola*, cui perpendicularis est recta G R; eadem itaque GR curvæ V G C quoque perpendicularis erit: Quod E. D.

(a) Hyp. (b) 25 Lect. VI

Fig. 91.

XVII. Sint recta D Q, duæque curvæ D R S, D Y X ità relatæ, ut ductâ utcunque rectâ R E Y ad positione datam D B parallelâ (quæ dictas lineas secet, ut perspicis) connexâque rectâ D Y, sit semper R Y . D Y : : D Y . E Y; tangat autem recta R F curvam D R S ad R; oportet curvæ D Y X tangentem ad Y rectam designare.

Concipiatur linea D Y O talis, ut ductâ utcunque G O ad D B parallelâ (quæ lineas F R, F P, D Y O secet punctis G, P, O) connexâque D O sit semper G O . D O : : D O . P O; tanget curva D Y O curvam D Y X ad Y; Nam secet recta G O curvas D R S, D Y X punctis S, X; & connectantur rectæ D G, D S, D X; patet (è curvarum natura) angulos X D P, D S P, nec non angulos ODP, DGP æquari; quare cùm angulus D S P major sit angulo D G P; erit angulus X D P angulo O D P major, adeóque P X major erit quàm P O; hinc curva D Y O curvam D Y X tanget ad Y; est autem curva DYO *hyperbola* (a) superiùs determinata; hanc tangat Y S; hæc igitur curvam D Y X quoque tanget.

(a) 12 Lect. VI.

Not. Si curva D R S sit circulus, & angulus Q D B rectus, erit curva D Y X *cissois* vulgaris; hujus itaque (cum innumeris aliis similiter genitis) tangens hìc definitur.

Fig. 92.

XVIII. Positione datæ sint rectæ D B, B K; sitque curva D Y X talis;

talis; ut à puncto D ductâ quâvis rectâ DYH (quæ rectam BK secet in H, curvam DYX in Y) sit perpetuò subtensa DY æqualis rectæ BH; oportet curvæ DYX tangentem ad Y rectam determinare.

Centro D per B ducatur circulus BRS; cui occurrat recta YER ad BK parallela; & connectatur DR; estque (propter ang. DYE = ang. DHB; & DY = BH, ac DR = DB) triangulum RDY triangulo DBH simile ac æquale; quare RY. YD :: (DH. HB) :: YD. YE. unde ex præcedente determinabilis est recta curvam DYX tangens in Y.

XIX. Sint itidem rectæ DB, BK positione datæ; nec non curva BXX talis, ut à puncto D projectâ quâcunque rectâ DX (quæ rectam BK secet in H, curvámque BXX in X) sit perpetuò HX ipsi BH æqualis; designetur oportet recta curvam BMX tangens in X. Fig. 93.

Concipiatur curva DYY talis, ut perpetuò sit DY = BH (talis nempe, qualem attigimus in præcedente) hanc verò tangat recta YT in Y, ipsi BK occurrens in R; tum *asymptotis* RB, RT per X descripta censeatur *hyperbola* NXN; ad quamutcunque projiciatur recta DN (lineas expositas secans, ut vides) Estque jam OM (a) = DI) ⊐ (a) (DL (b) =) ON, ergò *hyperbola* NXN curvam BXX tangit ad X. Ducatur itaque recta XS *hyperbolam* NXN contingens, hæc ipsam curvam BXX quoque continget. a) *Constr.* (b) *Convers.* 9. Lect. VI.

Cæterùm satis pro hac vice nugati videmur; cessemus aliquantisper.

LECT. IX.

Lect. IX.

Quod ingressi sumus iter actutùm rectà prosequemur.

Fig. 94. I. Sint rectæ A B, V D sibi parallelæ; quas secat positione data D B; transeant verò per B lineæ E B E, F B F ità ad se relatæ, ut ductâ quâvis P G ad D B parallelâ, sit perpetuò P F inter P G, P E eodem ordine designato media *Arithmeticè*; tangat autem recta B S curvam E B E; oportet lineæ F B F tangentem (ad B) designare.

(a) 12. Lect. VII. Sint Numeri N, M proportionalium P F, P E (quales (a) explicuimus supra) exponentes; fiátque N . M :: D S . D T; connectatúrque T B; hæc lineam F B F continget.

Nam utcúnque ducta sit recta P G, dictas lineas secans, uti cernis: Estque F G . E G (b) :: N . M :: (c) D S . D T :: (d) L G . K G; cùm ergò (e) sit K G ⊐ E G; erit L G ⊐ F G; unde liquet rectam T B extra curvam F B F totam consistere.

(b) 11. Lect. VII. (c) Constr. (d) 3. Lect. 7. (e) Hyp.

II. Reliquis perstantibus iisdem, sit jam P F inter P G, P E media proportionalis Geometricè (eodem ordine media nempe, quo fuit priùs Arithmeticè) eadem B T curvam F B F continget.

(a) 17. Lect. 7. Etenim è mediis Arithmeticè Geometricéque proportionalibus hocce modo constructæ lineæ sese mutuò (a) contingunt ad B; ergò cùm recta B T tangat unam, hæc alteram quoque continget.

Exemplum. Sit P F inter P G, P E è sex mediis tertia; erit ergò M = 7; & N = 3; adeóque D S . D T :: 3 . 7.

Fig. 95. III. Manente porrò quoad cætera proximè præcedente hypothesi, sumptóque quovis in curva F B F puncto F; etiam ad hoc punctum tangens recta simili pacto designatur.

Nempe per F ducatur recta P G ad ipsam D B parallela, secans curvam E X E in E, tum E X tangat curvam E B E in E; fiátque N . M ::

M : : PX . PY ; connectatúrque recta FY; hæc curvam FBF continget.

Nam per E ducatur recta C E ad A B (vel V D) parallela ; concipiatúrque per E transiens curva H E H talis, ut ductâ quâpiam Q L ad D E parallelâ (curvas E B E, H E H in L, & H ; rectásque C E, V P in I ac Q secante) sit semper Q H inter Q I , Q L eodem ordine media, quo P F inter P G, P E ; è præcedente jam constat rectam connexam E Y curvam H E H contingere ; verùm curvæ H E H (a) analoga est curva F B F ; (b) ergò recta F Y curvam F B F quoque contingerer. a 7. Lect. 7. b 5. Lect. 8.

IV. Adnotetur, posito lineam E B E rectam esse, quòd linea FBF parabolarum seu paraboliformium aliqua sit, quare quod de his passim observatum habetur (ex calculo deductum, & inductione quâdam comprobatum, nescio tamen an uspiam Geometricè ostensum) ex immensùm uberiore fonte manat, ad innumeras aliorum generum curvas se diffundente.

V. Hinc apertè consectatur ; si T D sit recta, sintque duæ quædam curvæ E E E, F F F ità ad se relatæ, ut ductis rectis P E F ad positione datam B D parallelis, sint ordinatæ P E semper ut quadrata ex ordinatis P F ; rectæ verò E S, F T (ex ejusdem communis ordinatæ terminatis ductæ) curvas hasce contingant ; erit T P = 2 S P ; Quod si ordinatæ PE se habeant ut ipsarum PF cubi, erit TP = 3 S P ; si P E sint ut quadrato quadrata ipsarum P F , erit T P = 4 S P ; ac sic eodem ad infinitum continuo tenore. Fig. 96.

VI. Sit porrò Circulus A B C, cujus Centrum D , radius D B, item lineæ E B E, F B F per B transeuntes, ac ità relatæ, ut ductâ per D rectâ quâpiam D G, sit semper D F eodem ordine media Arithmeticè inter D G, D E ; tangat autem recta B O curvam E B E in B ; oportet curvæ F B F tangentem (ad B) designare. Fig. 97.

Hoc (certè (a) generatim quadantenus præstitum) è re fuerit hic speciatim apertiùs atque pleniùs exequi : Quorsum sit D Q ad D B perpendicularis, quam secet B O in S ; fiat verò N . M : : D S . D T ; connectatúrque recta T B ; hæc curvam F B F tanget. a 8. Lect. 8.

Tangat enim recta P B *circulum* A B G ; secentúrque rectæ D S in X, & B S in Y, ità ut sit D S . D X : : M . N : : B S . B Y ; perque puncta X , Y ducantur X Z ad B S, & Y V ad D S parallelæ, concurrentes in C ; tum *asymptotis* VC Z per B traducta concipiatur *hyperbola* L B L ; porrò ex D projiciatur utcunque recta D P dictas lineas inter- Fig. 97.

interſecans, ut expreſſum vides ; eſtque jam PK . PL :: (a) M . N :: (b) GE . GF (c) ⊏ PE . PF ⊏ PK . PF ; quare PL ⊐ PF ; igitur *Hyperbola* LBL curvam FBF tangit. Protracta jam TB cum XZ conveniat in R ; eſtque eorum RZ . ZB :: BS . ST . unde RZ × ST = BS × ZB = BS × SX. atqui propter DS . SX :: (d) BS . SY, eſt DS × SY = BS × SX. ergò RZ × ST = DS × SY = DS × CX . vel RZ . CX :: DS . ST ; compoſitéque RZ + RZ + CX :: DS . DT :: (d) N . M :: CZ . CZ + CX. itaque diviſim eſt RZ . CX :: CZ . CX. adeóque RZ = CZ ; unde RB *hyperbolam* LBL tangit ; hæc igitur (RBT) curvam FBF, ipſi LBL contiguam, quoque tanget. quod erat Propoſitum.

a Converſ. 4. Lect. VI. b 11. Lect. VII. c 1. Lect. VII. d Conſtr.

VII. Hinc ſi perſiſtentibus reliquis, recta tantùm DF jam inter DG, DE perpetuo Geometricè media ſtatuatur (eodem qui priùs fuit ordine) eadem BT curvam FBF quoque continget.

Etenim ex mediis ejuſdem ordinis *Arithmeticè Geometricéque* proportionalibus efformatæ lineæ ſe mutuò contingunt, adeóque communi rectâ tangente gaudent.

Fig. 98. VIII. Porrò (ſtantibus reliquis ut in poſtremâ) quodvis in curva FBF deſignetur punctum F, quæ curvam ad hoc tanget recta ſimili pacto determinatur.

Connectatur utique recta DF curvam EBE ſecans ad E ; item ducatur DQ ad DG perpendicularis ipſam EO interſecans ad X ; fiat etiam DX . DY :: N . M ; & connectatur EY ; ipſi demùm EY parallela ducatur FZ ; hæc curvam FBF continget.

Nam centro D per E ducatur circulus CEI ; concipiatúrque linea HEH talis, ut à D eductâ quacunque rectâ DI (quæ circulum CE ſecet in I, curvam HEH in H, & ipſam EBE in L) ſit pepertuò DH eodem inter DI, DL ordine proportionalis, quo DF inter DG, DE ; palam eſt tunc (è præcedente) quòd recta EY curvam HEH tanget ; verùm ipſi HEH (a) analoga eſt curva FBF ; (b) quare recta FZ curvam FBF quoque tanget.

a 9. Lect. VII. b 7. Lect. VIII.

Exhinc nedum innumerarum ſpiralium ; at aliarum diverſi generis infinities plurium tangentes quàm promptè determinantur.

Fig. 99. IX. Hinc clarum eſt, ſi duæ lineæ EEE, FEF ſic ad ſe referantur, ut à puncto quodam D utcunque projectis rectis DEF ; habeant ſe rectæ DE, ut quadrata ex ipſis DF, & ad harum terminos tangant curvas rectæ ES, FT ; cum perpendicularibus ad ipſas DEF

D E F concurrentes punctis S, T; erit semper $DT = 2\,DS$. Quòd si D E sunt ut cubi ipsarum D F, erit semper $DT = 3\,DS$; ac simili deinceps modo. Fig. 99.

X. Sint rectæ V D, T B concurrentes in T, quas decusset positione data recta D B; transeant etiam per B lineæ E B E, F B F tales, ut ductâ quâcunque P G ad D B parallelâ, sit perpetuò P F eodem ordine media Arithmeticè inter P G, P E; tangat autem B R curvam E B E, oportet lineæ F B F tangentem ad B determinare. Fig. 100.

Sumptis N M (ordinum in quibus sunt P F, P E exponentibus) fiat $N \times TD \left.\begin{matrix} + M \\ - N \end{matrix}\right\} \times RD \,.\, M \times TD :: RD \,.\, SD$; & connectatur B S; hæc curvam F B F continget.

Nam utcunque ducta sit P G, dictas lineas secans ut vides. Estque $EG \,.\, FG ::$ (a) $M \,.\, N$. ergò $FG \times TD \,.\, EG \times TD :: N \times TD \,.\, M \times TD$. Item $EF \times RD \,.\, EG \times TD :: M - N \times RD \,.\, M \times TD$. (a) 11. Lect. VII. Quapropter (antecedentes conjungendo) erit $FG \times TD + EF \times RD \,.\, EG \times TD :: N \times TD + M - N \times RD \,.\, M \times TD$, (hoc est) :: (b) $RD \,.\, SD$. (c) Est autem $LG \times TD + KL \times RD \,.\, KG \times TD :: RD \,.\, SD$. (b) Constr. quare $FG \times TD + EF \times RD \,.\, EG \times TD :: LG \times TD + KL \times RD \,.\, KG \times TD$. (c) 4. Lect. VII. hinc, cùm sit EG (d) $\sqsubset KG$; erit $FG \times TD + EF \times RD \sqsubset LG \times TD + KL \times RD$; (d) Hyp. vel $FG \,.\, EF + TD \,.\, RD \sqsubset LG \,.\, KL + TD \,.\, RD$; seu (demptâ communi ratione) $FG \,.\, EF \sqsubset LG \,.\, KL$. vel componendo $EG \,.\, EF \sqsubset KG \,.\, KL$ (e) $\sqsubset EG \,.\, EL$. unde est $EF \sqsupset EL$. (e) 1. Lect. VII. itaque punctum L extra curvam F B F situm est; adeoque liquet Propositum.

XI. Quinetiam, reliquis stantibus iisdem, si P F supponatur ejusdem ordinis Geometricè media liquet (planè sicut in modò præcedentibus) eandem B S curvam F B F contingere.

Exemplum. Si P F sit è sex mediis tertia, seu $M = 7$; & $N = 3$; erit $3\,TD + 4\,RD \,.\, 7\,MD :: RD \,.\, SD$; vel $SD = \dfrac{7MD \times RD}{3TD + 4RD}$.

XII. Patet etiam, accepto quolibet in curva F B F puncto (ceu F) rectam ad hoc tangentem consimili pacto designari. Nempe per F ducatur recta P G ad D B parallela, secans curvam E B E ad E; & per E ducatur E R curvam E B E tangens; fiatque $N \times TP \left.\begin{matrix} + M \\ - N \end{matrix}\right\} \times RP$. Fig. 101.

$M \times TP :: RP . SP$; & connectatur SF; hæc curvam FBF tanget; id quod omnino simili discursu demonstratur, quo tertia hujus; tantùm hìc (non per E ad VD parallela ducitur, at) connectitur ET; & loco septimæ allegatur octava septimæ Lectionis. quid plura?

XIII. Adnotetur, si linea EBE sit recta, (rectæ nempe BR coincidens) esse lineam FBF ex *infinitis hyperbolis* (vel *hyperboliformibus*) aliquam; quarum igitur (unà cùm aliarum infinities diversi generis plurium) *Tangentes* determinandi modum uno *Theoremate* complexi sumus.

XIV. Quòd si puncta T, R non ad easdem partes puncti D (vel P) cadant; curvæ FBF tangens (BS) designatur faciendo $N \times RD -$: $\left.\begin{matrix} M \\ -N \end{matrix}\right\} \times TD . M \times TD :: RD . SD$.

Fig. 102.

Simili planè discursu constat hoc, tantùm (quartæ loco) septimæ Lectionis quintam adhibendo.

XV. Hinc autem nedùm *Ellipsoidum* omnium (posito nempe lineam EBE rectam esse, lineæ BR coincidentem) ast aliarum alterius generis *linearum innumerabilium Tangentes* unâ operâ determinantur.

Exemplum. Si PF sit è quatuor mediis quarta, seu $M = 5$; & $N = 4$; erit $SD = \frac{5 TD \times RD}{4 RD - TD}$.

Notetur; Si contigerit esse $ND \times RD = \left.\begin{matrix} M \\ -N \end{matrix}\right\} \times TD$, esse DS infinitam; seu BS ipsi VD parallelam. Alia possent adnotari; sed relinquo.

Fig. 103.

XVI. Inter alias curvas innumeras, etiam hâc methodo *Cissois* & *Cissoidalium* omne genus comprehenditur: Sit utique semirectus angulus DSB; curvæque duæ SGB, SEE sic ad se referantur, ut ductâ liberè rectâ GE ad BD parallelâ, (quæ lineas expositas, ut conspicis, secet) sint PG, PF, PE continuè proportionales; tangat autem recta GT curvam SGB in G, reperietur quæ ad E lineam SEB tangit, faciendo $2TP - SP . TP :: SP . RP$; utique connexa RE curvam SEE tanget. Id quod è præmissis facilè colligitur. Quòd si jam curva SGB sit circulus, & applicationis angulus SPG sit

sit rectus, erit curva S E E *Cissois vulgaris*, seu *Dioclea*; alioquin alterius generis *Cissoidalis*. Hoc autem ἐν παρόδῳ perstringo. Neq; jam ampliùs vos detinebo.

Lect. X.

INstitutum circa tangentes negotium adhuc urgeo.

I. Sit curva quæpiam A E G, nec non alia A F I sic ad illam relata, ut ductâ quâcunque E F ad positione datam A B parallelâ (quæ curvam A E G secet in E, curvámque A F I in F) sit perpetim E F æqualis curvæ A E G ab A intercepto arcui A E; tangat autem recta E T curvam A E G in E, sitque E T æqualis arcui A E, & connectatur recta T F; hæc curvam A F I tanget. Fig. 104.

Nam ducatur utcunque recta G K ad A B parallela, lineas propositas secans, ut cernis; éstque $GK = GH + HK = GH + HT$ (a) $\sqsubset$ arc. $AG = GI$; unde punctum K extra curvam A F I situm est; adeóque recta T K ipsam tangit. (a) 11 Lect. VII.

II. Quòd si recta E F quamlibet ad arcum A E rationem semper eandem habeat, nihilo seciùs recta F T curvam A F I tanget; ut ex hac, & octavæ Lectionis sexta manifestæ consectatur.

Hæc antea pridem aliter ostendimus; ast hæc demonstratio simplicior aliquanto videtur, & clarior; methodóque quam insinuamus accommodatior.

III. Sit *curva* quæpiam A G E, punctúmque designatum D; sit item alia curva A I F talis, ut à D projectâ rectâ quâcunque D E F, sit semper intercepta E F par arcui A E; tangátque recta E T curvam A G E; oportet curvæ A I F *Tangentem* (ad F) designare. Fig. 105.

Fiat T E = arc. A E; sitque curva T K F talis, ut ductâ utcunque (è D) rectâ D K (quæ curvam T K F secet in K, rectámque T E in H)

(a) 17. Lect. VIII. fit ſemper HK = HT; tum curvam TKF (a) tangat recta FS in F, hæc curvam AIF quoque continget.

(a) 12. Lect. VII. Eſt enim GK = GH + HK = GH + HT (a) GA = GI. quare punctum K extra curvam AIF jacet; adeóque recta FS curvam AIF continget.

IV. Quòd ſi recta EF ad arcum AE eandem aliquamcunque ſtatuatur habere proportionem, tangens ejus facilè determinatur ex hac, & octava octavæ Lectionis.

Fig. 106. V. Sint recta AP, duæque *curvæ* AEG, AFI, ità ad ſe relatæ ut ductâ utcunque rectâ DEF (quæ rectam AP, curvas AEG, AFI punctis D, E, F, ſecet) ſit ſemper recta DT æqualis arcui AE; tangat autem recta ET curvam AEG ad E; ſumatúrque ET par arcui EA; & ſit TR ad BA parallela; connectatur denuò recta RF; hæc curvam AFI tanget.

(a) 12. Lect. VII. (b) 16. Lect. VI. * Hyp. (c) 3 Lect. VIII. (d) 2. Lect. VIII. Concipiatur enim curva LFL talis; ut ductâ quâcunque rectâ PL ad AB parallelâ (quæ curvam AEG in G, rectam TE in H, curvam LFL in L ſecet) ſit perpetuò recta PL æqualis ipſis TH, HG ſimul; eſt itaque PL (a) ⊏ arc. AEG * = PI. Unde curva LFL curvam AFI tangit. Item recta IK (b) æquatur rectæ TH; (c) adeóque curva LFL rectam RFK tangit; (d) quare curvam AFI tanget recta.

VI. Etiam ſi rectæ DE ad arcus AE quamlibet ſemper eandem rationem habeant, recta RF nihilominus curvam AFI tanget, ut ex hac, & ſexta octavæ Lectionis facilè patet.

Fig. 107. VII. Sit punctum D; duæque curvæ AGE, DIF ità verſus ſe relatæ ſint, ut à puncto D projectâ quâvis rectâ DFE, ſit perpetuò recta DF æqualis arcui AE; tangat autem recta ET curvam AGE ad E; deſignanda jam eſt recta, quæ curvam DIF tangat (ad F).

(a) 16. Lect. VIII. Sumatur ET par *arcui* FS; concipiatúrque *curva* DKK talis, ut à D projectâ utcunque rectâ DH (quæ curvam DKK in K, rectam TE in H ſecet) ſit perpetuò DK = TH; tum curvam DKK (a) tangat recta FS ad F; hæc curvam DIF quoque tanget.

(b) 12. Lect. VII. (c) Hyp. (d) 4. Lect. VIII. Intelligatur enim *curva* LFL talis, ut à D projectâ quapiam rectâ DH (quæ rectam TE ſecet in H, curvam LFL in L) ſit ſemper DL = TH + HG; eſt itaque DL (b) ⊏ arc. AG (c) = DI; (d) itaque curvæ DIF, LFL ſeſe (b) contingent. item curvæ KFK, LFK

LFK ſeſe contingunt. (*e*) quare curvæ D I F, K F K ſe quoque contingent. (*e*) ergò denique recta F S curvam D I F continget. (*e*) 1. Lect. VIII.

VIII. Quòd ſi rectæ D F quamvis aliam conſtanter eandem ad arcus A E rationem obtinuerint, itidem deſignari poteſt recta curvam D I F tangens, ex hac, & ſeptima octavæ Lectionis; erit utique tangens iſta huic F S parallela.

IX. Hinc nedum *ſpiralis circularis*, aſt innumerabilium ſimili ratione progenitarum aliarum curvarum *Tangentes* determinantur.

X. Sint curva quæpiam A E H, recta A D (in qua determinatum punctum D) recta D H poſitione data; ſit item curva A G B talis, ut in hac aſſumpto quocunque puncto G, & per hoc ac D projectâ rectâ D G E (quæ curvam A E H ſecet in E) ductâque G F ad D H parallelâ habeant A E, A F aſſignatam rationem X ad Y; tangat autem recta E T curvam A E H; recta deſignetur oportet, quæ curvam A G B ad G tangat. Fig. 108.

Fiat recta E V æqualis arcui E A; & concipiatur curva O G O talis, ut projectâ quâcunque rectâ D O L (quæ curvam O G O ſecet puncto O, rectam E T in L) ductâque O Q ad G F parallelâ, ſit V L . A Q : : X . Y; eſtque curva O G O (è ſupra monſtratis) *Hyperbola*; hanc tangat recta G S; etiam recta G S curvam A G B continget.

Nam concipiatur altera curva N G N talis, ut cùm hanc ſecet recta arbitraria D L in N, curvam A E H in K, rectam T E in L; ductâq; ſit N R ad G F parallela, ſit V L + L K . A R : : X . Y; manifeſtum eſt curvam N G N utramque curvam A G B, & O G O tangere. [ſecet enim recta D L curvam A E B in I, ducatúrque I P ad G F parallela; quum ergò ſit V L + L K . A R : : X . Y : : A K . A P. & ſit V L + L K ⊏ A K; erit A R ⊏ A P; vel D R ⊐ D P; adeóque D N ⊐ D I; unde punctum N intra curvam A G B ſemper cadet; ac proinde curva N G N curvam A G B tanget; ſimilique planè diſcurſu curva N G N curvam O G O continget.] Itaque curvæ A G B, O G O ſeſe (æquipollentèr) tangunt. Quare cùm recta G S curvam O G O tangat; eadem curvam A G B quoque continget: Q. E. F.

Si curva A E H ſit circuli quadrans, cujus centrum D; erit curva A G B *Quadratrix communis*. Ejus igitur *Tangens* (unà cùm omnium ſimili ratione genitarum tangentibus) hoc pacto deſignatur,

Hujuſmodi

Hujusmodi plura quædam cogitaram hìc inserere; verùm hæc existimo sufficere subindicando modo, juxta quem, citra *Calculi molestiam*, *curvarum tangentes* exquirere licet, unáque constructiones demonstrare. Subjiciam tamen unum aut alterum non aspernanda, ut videtur *Theoremata* perquam generalia.

XI. Sit linea quæpiam Z G E, cujus axis V D; ad quam imprimìs applicatæ perpendiculares (V Z, P G, D E) ab initio V Z continuè utcunque crescant; sit item linea V I F talis, ut ductâ quâcunq; rectâ E D F ad V D perpendiculari (quæ *curvas* secet punctis E, F, ipsam V D in D) sit semper *rectangulum* ex D F, & designatâ quâdam R æquale *spatio* respectivè *intercepto* V D E Z; fiat autem D E. D F : : R. D T; & connectatur recta T F; hæc curvam V I F continget.

Fig. 109.

Sumatur enim in linea V I F punctum quodpiam I (illud primò supra punctum F, versus initium V) & per hoc ducantur rectæ I G ad V Z, ac K L ad V D parallelæ (quæ lineas expositas secent, ut vides) éstque tum L F. L K : : (D F. D T : :) D E. R; adeóque L F × R = L K × D E. Est autem (ex præstituta linearum istarum natura) L F × R æquale spatio P D E G; ergò L K × D E = P D E G ⊐ D P × D E. Unde est L K ⊐ D P; vel L K ⊐ L I.

Fig. 110.

Rursus accipiatur quodvis punctum I, infra punctum F, reliquáq; fiant, uti priùs; similíque jam planè discursu constabit fore L K × D E = P D E G ⊏ D P × D E, unde jam erit L K ⊏ D P, vel L I. E quibus liquidò patet totam rectam T K F K intra (seu extra) curvam V I F I existere.

Iisdem quoad cætera positis, si *ordinatæ* V Z, P G, D E, *&c.* continuè decrescant, eadem conclusio simili ratiocinio colligetur; unicum obvenit *Discrimen*, quòd in hoc casu (contra quàm in priore) linea V I F concavas suas axi V D obvertat.

Corol. Notetur D E × D T æquari spatio V D E Z.

XII. Exindè deducitur hoc *Theorema*: Sint duæ lineæ quævis Z G E, V K F ita relatæ, ut ad communem ipsarum axem V D applicatâ quâvis rectâ E D F, sit semper quadratum ex D E æquale *duplo spatio* V D E Z; sumatur autem D Q = D E, & connectatur F Q; hæc curvæ V K F perpendicularis erit.

Fig. 111.

Concipiatur enim linea V I F, per F transiens, talis qualem mox attigimus (cujus scilicet ad V D applicatæ se habeant ut spatia VDEZ; hoc est ut quadrata ex applicatis à curva V K F in præsente hypothesi) lineámque

lineámque V I F tangat recta F T; item lineam V K F tangat recta F S. Est ergò S D (a) = 2 T D. atqui D E × D T (b) = VDEZ. ergò D E × S D = (2 VDEZ =) F Dq. unde constat angulum QFS rectum esse. quod Propositum erat. (a) 5. Lect. IX. (b) Cor. prae.

Adjungam & illis cognata hæc.

XIII Sit curva quævis A G E Z, punctúmque quoddam D (à quo projectæ D A, D G, DE, &c. ab initio D A continuò decrescant). tum altera sit curva D K E, priorem intersecans in E, naturâque talis, ut à D utcunque projectâ rectâ D K G (quæ curvam A E Z secet in G, curvam D K E in K) sit perpetuò rectangulum ex D K, & designatâ quâdam lineâ R æquale spatio A D G; tum ductâ D T ad D E perpendiculari, sit D T = 2 R; & connectatur T E; hæc curvam D K E continget. Fig. 112.

Nam sumpto quovis in curva D K E puncto K, ducatur recta DKG; & sumptâ D L = D K, ducatur L R ad D T parallela (secans ipsam D G in Y). tum per E ducatur E X ad D E perpendicularis (hæc verò extra curvam A E Z, ad partes Z cadet, quia decrescunt projectæ versus Z; unde E X versus A intra curvam E G A cadet; eatenus saltem, quatenus huic Proposito satisfaciet). Sit jam primò punctum G supra E, versus initium A, & ob T D. D E :: R L. L E; adeóque R L × D E = T D × L E (a) = 2 R × L E (a) = 2 GDE ⊏ 2 D E X = E X × D E. ergò R L ⊏ E X ⊏ L Y. Est autem punctum Y extra curvam, quia D Y ⊏ D L = D K; ergò magis punctum R est extra curvam. Fig. 113. (a) Hyp.

Sit rursus punctum G infra punctum E versus Z; eštque rursus, uti prius, R L × D E = 2 G D E ⊐ 2 triang. E D X = E X × D E. unde R L ⊐ E X ⊐ L Y. Est autem recta L Y extra curvam E K tota, (nam etiam extra arcum L K curvæ K E circumductum tota jacet) ergò punctum R rursus extra curvam existit. Liquidum est igitur rectam T E R curvam D K E tangere.

Quòd si punctum aliud in curva D K E designetur, puta K; per quod ducta sit D K G; & fiat D G. D K :: R. P; sumatúrque D T = 2 P; & connectatur T G; tum ducatur K S ad G T parallela; recta K S curvam D K E tanget.

Nam concipiatur curva D O G, per G transiens, talis, ut rectâ quâcunque D O N à D projectâ (quæ curvam D O G secet in O, curvam D N E in M, curvam A G E in N) sit semper D O × P æqualis spatio A D N; erit ideò D M × R = D O × P; ac proinde D M. D O :: P. R. unde lineæ D K E, D O G analogæ erunt. Verùm

rùm ex jam modò oſtenſis G T curvam D O G tangit; ergò K S ipſam D K E continget.

Notetur eſſe D G q. D K q :: 2 R. D S.

Nam eſt D G q. D K q = D G. D K + D G. D K = R. P + D T. D S = R. P + 2 P. D S = 2 R P. P × D S = 2 R. D S. itaque D G q. D K Q; :: 2 R. D S.

Hæc autem perinde vera ſunt, nec abſimili modo demonſtrantur; etiam ſi projectæ à D rectæ D A, D G, D E, *&c.* pares ſint (quo caſu curva A G E Z *Circulus* erit, & *Curva* D K E *Spiralis Archimedæa*) aut à D A continuò creſcant.

Exindè verò facilè colligitur hoc *Theorema* :

XIV. Sint duæ curvæ A G E, D K E ità verſus ſe relatæ, ut à deſignato in curva D K E puncto D ductis rectis D A, D G (quarum hæc ipſam D K E ſecet in K) ſit ſemper *Quadratum* ex D K *Quadruplum ſpatii* A D G; ductâ D H ad D G perpendiculari, & facto D K. D G :: D G. D H; connexâque H K; erit H K curvæ D K E perpendicularis. Fig. 114.

Nam concipiatur linea D O K O, per K tranſiens, naturâque talis, ut ad illam à D projectæ (ceu DK) ſe habeant in eadem quâ ſpatia ADG ratione (quales lineas attigimus in proximè ſuperiori) & lineam D O K tangat recta K T, lineam D K E recta K S; conveniant autem hæ cum ipſa H D punctis T, S; eſt igitur (è præcedente) D G q. D K q :: $\frac{DK}{2}$. D T. hoc eſt D H. D K :: $\frac{DK}{2}$ D T; hoc eſt (quoniam è * mox præmonſtratis D S = 2 D T) D H. D K :: ($\frac{DK}{2}$. $\frac{DS}{2}$ ::) D K. D S. Liquet igitur rectam H K tangenti K S perpendicularem eſſe: Q. E. D.

* *In 12. hujus.*

Ità Propoſiti noſtri priore (quam innuebamus) parte quomodocunque defuncti ſumus. Cui ſupplendæ, appendiculæ inſtar, ſubnectemus à nobis uſitatum methodum ex Calculo tangentes reperiendi. Quanquam haud ſcio, poſt tot ejuſmodi pervulgatas atque protritas methodos, an id ex uſu ſit facere. Facio ſaltem ex Amici conſilio; eóque libentiùs, quòd præ cæteris, quas tractavi, compendioſa videtur, ac generalis. In hunc procedo modum.

Sint A P, P M poſitione datæ rectæ lineæ (quarum P M propoſitam curvam ſecet in M) & M T curvam tangere ponatur ad M, rectam

rectam A P secare ad T; ut ipsius jam rectæ P T quantitatem exquiram; curvæ arcum M N indefinitè parvum statuo; tum duco rectas N Q ad M P, & N R ad A P parallelas; nomino $MP = m$; $PT = t$; $MR = a$; $NR = e$; reliquásque rectas, ex speciali curvæ natura determinatas, utiles proposito, nominibus designo; ipsas autem M R, N R (& mediantibus illis ipsas M P, P T) per *æquationem* è Calculo deprehensam inter se comparo; regulas interim has observans. 1. Inter computandum omnes abjicio terminos, in quibus ipsarum a, vel e potestas habetur, vel in quibus ipsæ ducuntur in se (etenim isti termini nihil valebunt). Fig. 115.

2. Post *æquationem constitutam*, omnes abjicio terminos, literis constantes quantitates notas, seu determinatas designantibus; aut in quibus non habentur a, vel e. (etenim illi termini semper, ad unam æquationis partem adducti, nihilum adæquabunt).

3. Pro a ipsam m; (vel M P) pro e ipsam t (vel *P T*) substituo. Hinc demum ipsius P T quantitas dignoscetur.

Quòd si calculum ingrediatur curvæ cujuspiam indefinita particula; substituatur ejus loco tangentis particula ritè sumpta; vel ei quævis (ob indefinitam curvæ parvitatem) æquipollens recta.

Hæc autem è subnexis Exemplis clarius elucescent.

Exemp. I.

Angulus A B H rectus sit; & sit curva A M O talis, ut per A ductâ utcunque rectâ A K, quæ rectam B H secet in K, curvam A M O in M, sit semper subtensa A M æqualis abscissæ B K; hujus curvæ ad M tangens est designanda. Fig. 116.

Fiant quæ suprà præscripta sunt, & (ductâ A N L) nominetur $AB = r$; & $AP = q$; unde $AQ = q - e$; item $QN = m - a$. ergò est $qq + ee - 2qe + mm + aa - 2ma = (AQq + QNq = ANq =) BLq$; hoc est (rejectis, uti monitum est, rejiciendis) $qq - 2qe + mm - 2ma = BLq$. Porrò est $AQ . QN :: AB . BL$; hoc est $q - e . m - a :: r . BL = \frac{rm - ra}{q - e}$. quare $\frac{rrmm + rraa - 2rrma}{qq + ee - 2qe} = BLq$; seu (rejectis superfluis) $\frac{rrmm - 2rrma}{qq - 2qe} = BLq = qq - 2qe + mm - 2ma$. vel $rrmm - 2rrma = q^4 - 2q^3e + qqmm - 2qqma - 2q^3e + 4qqee - 2qmme + 4qmae$; hoc est (abjectis iis, quæ præscripsimus

abjicienda) $-2rrma = -4q^3e - 2qqma - 2qmme$. vel $rrma - qqma = 2q^3e + qmme$; vel denuò substituendo m pro a, & t pro e, est $rrmm - qqmm = 2q^3t - qmmt$; vel

$$\frac{rrmm - qqmm}{2q^3 - qmm} = t = PT.$$

Exemp. II.

Fig. 117. Sit recta E A (positione ac magnitudine data) & curva E M O proprietate talis, ut ab ea utcunque ductâ rectâ M P ad E A perpendiculari *Summa Cuborum* ex A P, & M P æquetur *Cubo* rectæ A E.

Nominentur A E $= r$; A P $= f$; unde A Q $= f + e$; & A Q cub. $= f^3 + 3ffe + 3fee + e^3$; (seu abjectis superfluis, ex præscripto) $= f^3 + 3ffe$. Item N Q cub. $=$ cub. $m - a = m^3 - 3mma + 3maa - a^3$ (hoc est) $= m^3 - 3mma$. Quapropter est $f^3 + 3ffe + m^3 - 3mma =$ (A Q cub. + N Q cub. $=$ A E cub. $=$) r^3. abjectísque datis, est $3ffe = 3mma = o$. seu, $ffe = mma$; subrogatisque loco a, & e ipsis m, & t, erit $fft = m^3$; seu $t = \frac{m^3}{ff}$; est ergò P T quarta proportionalis in ratione A P ad P M continuata.

Similiter, Si fuerit A P q q + M P q q $=$ A E q q; reperietur fore P T $= \frac{m^4}{f^3}$; vel P M quarta proportionalis in ratione A P ad P M; ac ità porrò; quod de *Cycloformibus* istis lineis an observatu dignum sit nescio.

Exemp. III.

Positione data sit recta A Z, & A X magnitudine; sit etiam *curva* A M O talis, ut ductâ utcunque rectâ M P ad A Z normali, sit A P *cub.* + P M *cub.* $=$ A X $\times$ A P $\times$ P M.

Fig. 118. *La Galande*

Dicantur A X $= b$; & A P $= f$; ergò A Q $= f - e$; & A Q *cub.* $= f^3 - 3ffe$; & Q N *cub.* $= m^3 - 3mma$. & A Q $\times$ Q N $= fm - fa - me + ae = fm - fa - me$; unde A X $\times$ A Q $\times$ Q N $= bfm - bfa - bme$; hinc æquatio $f^3 - 3ffe + m^3 - 3mma = bfm - bfa - bme$; seu amoliendo rejectanea

ctanea, $bfa - 3mma = 3ffe - bme$; substituendóque $bfm - 3m^3 = 3fft - bmt$; seu, $\frac{bfm - 3m^3}{3ff - bm} = t$.

Exemp. IV.

Sit *Quadratrix* CMV (ad circulum CEB pertinens cui centrum A,) cujus axis VA; ordinatæ CA. MP ad VA perpendiculares.

Protractis rectis AME, ANF, ductísque rectis EK, FL ad AB perpendicularibus, dicantur arcus $CB = p$; radius $AC = r$; recta $AP = f$; $AM = k$. Estque jam C A arc. CB :: NR. arc. FE. Fig. 119.

hoc est, $r . p :: a . \frac{pa}{r} =$ arc. FE. & AM. MP :: AE. EK; hoc

est, $k . m :: r . \frac{rm}{k} =$ EK; item AE. EK :: arc. FE. LK. hoc

est $r . \frac{rm}{k} :: \frac{pa}{r} : \frac{pma}{rk} =$ LK. Verùm AM. AE :: AP. AK;

hoc est $k . r :: f . \frac{rf}{k} =$ AK. ergò $\frac{rf}{k} - \frac{pma}{rk} =$ AL. Et $\frac{rrff}{kk} -$

$\frac{2fmpa}{kk}$ (abjectis superfluis) $=$ ALq; adeóque LF$q =$

$\frac{rrkk - rrff + 2fmpa}{kk} = \frac{rrmm + 2fmpa}{kk}$.

Est autem AQq. QNq :: ALq. LFq; hoc est $Q : f - e$. $Q : m + a$ :: ALq. LFq. hoc est $ff - 2fe . mm + 2ma :: rrff - 2fmpa . rrmm + 2fmpa$. Unde (sublatis ex norma rejectaneis) emerget *æquatio*, $ffpa + mmpa - rrfa = rrme$; seu $kkpa - rrfa = rrme$; vel substituendo juxta *præscriptum*; $kkpm - rrfm = rrmt$; vel $\frac{kkp}{rr} - f = t$. Hinc colligitur esse rectam AT $=$

$\frac{kk}{rr}p$; hoc est (quoniam, ut notum est, AV $= \frac{rr}{p}$) erit AT $=$

$\frac{AMq}{AV}$; seu, AV. AM :: AM. AT.

Exemp. V.

Fig. 120, 121. Sit DEB *Quadrans Circuli*, quem tangat recta BX; tum linea AMO talis, ut in recta AV utcunque sumptâ AP, quæ arcum BE adæquet, erectâque PM ad AV normali, sit PM æqualis arcûs BE tangenti BG.

Sumpto arcu BF = AQ; & ductâ CFH, demissis EK, FL ad CB normalibus; nominentur CB = r. CK = f: KE = g. Et quoniam est CE. EK :: arc. EF. LK; vel CE. EK :: QF. LK; hoc est $r . g :: e . \frac{ge}{r}$ = LK; erit CL $= f + \frac{ge}{r}$. Et LF $= \sqrt{rr - ff - \frac{2fge}{r}} = \sqrt{gg - \frac{2fge}{r}}$.

Est autem CL. LF :: (CB. BH ::) CB. QN. hoc est, $f + \frac{ge}{r} . \sqrt{gg - \frac{2fge}{r}} :: r . m - a$. vel (quadrando) $ff + \frac{2fge}{r} . gg - \frac{2fge}{r} :: rr . mm - 2ma$. Unde (dimissis quæ oportet) obtinetur æquatio, $rfma = grre + gmme$. unde substituendo, est $rfmm = grrt + gmmt$. vel $\frac{rfmm}{grr + gmm} = t$. seu (quoniam est $m = \frac{rg}{f}$) erit $t = \frac{rr}{rr + mm} m = \frac{CBq}{CGq}$ BG $= \frac{CKq}{CEq}$ BG.

Hæc sufficere videntur huic methodo elucidandæ.

LECT. XI.

LECT. XI.

RElìquis utcunque patratis, apponemus iam *quæ ad magnitudinum è tangentibus (seu è perpendicularibus ad curvas) Dimensiones eliciendas pertinentia se objecerunt Theoremata* ; de compluribus utiq; selectiora quædam.

I. Sit curva quæpiam V H (cujus axis V D, applicata H D ad V D normalis) item linea e Z ψ talis, ut si à curvæ puncto liberè sumpto (puta E) ducatur recta EP ad curvam perpendicularis, & recta E A Z ad axem perpenicularis, sit recta AZ interceptæ A P æqualis; erit *spatium* A D ψ e *æquale semissi quadrati* ex recta D H. Fig. 122.

Nam sit angulus H D O semirectus ; & æquisecetur recta V D indefinitè punctis A, B, C ; per quæ ducantur rectæ E A Z, F B Z, G C Z, ad H D parallelæ ; curvæ occurrentes in E, F, G ; à quibus rectæ E I Y, F K Y, G L Y ad V D (vel H O) parallelæ ducantur ; quin & rectæ E P, F P, G P, H P curvæ V H perpendiculares sint ; lineæ verò se intersecent, ut vides. Estque triangulum H L G simile triangulo P D H (nam ob indefinitam sectionem curvula G H pro rectà haberi potest) quare HL . LG : : P D . D H . adeóque H L × D H = L G × P D ; hoc est H L × H O = D C × D ψ. Simili monstra bitur discursu, quoniam triangulum G M F triangulo P C G assimilatur, fore L K × L Y = C B × C Z ; & similiter K I × K Y = B A × B Z ; itidem denuò I D × I Y = A V × A Z ; unde constat triangulum H D O (quod à rectangulis H L × H O + L K × L Y + K I × K Y + I D × I Y minimè differt) æquari spatio V D ψ e (quod itidem à rectangulis D C × D ψ + C B × C Z + B A × B Z + A V × A Z minimè differt) ; hoc est $\frac{DHq}{2}$ æquari spatio V D ψ e.

Longior discursus apagogicus adhiberi possit, at quorsum?

II. Iisdem

Fig. 122. II. Iisdem positis, atque paratis; *summa rectangulorum* AZ × AE + BZ × BF + CZ × CG, *&c.* æquatur *trienti cubi* ex base DH.

Nam ob HL.LG :: PD.DH :: PD × DH.DHq; erit HL × DHq = LG × PD × DH. hoc est HL × HOq = DC × D↓ × DH. Similique discursu, LK × LYq = CB × CZ × CG. & KI × KYq = BA × BZ × BF, *&c.* Verùm HL × HOq + LK × LYq + KI × KYq, *&c.* adæquant trientem cubi ex DH; itaque liquet Propositum.

III. Simili ratione constabit summam AZ × AEq + BZ × BFq + CZ × CGq, *&c.* æquari τῷ $\frac{DHqq}{4}$; & esse summam AZ × AE cub. + BZ × BE cub. + CZ × CG cub. *&c.* $= \frac{DH^5}{5}$; ac eodem in continuum tenore.

Fig. 122. IV. Exhinc consectantur haud aspernanda *Theoremata*: Sit VD↓φ spatium quodlibet, cujus axis VD, ut dictum, æquisectus; si concipiantur singula spatia VAZφ, VBZφ, VCZφ, *&c.* in suas ordinatas AZ, BZ, CZ, *&c.* respectivè singulas duci, quæ proveniet summa adæquabitur ipsius spatii VD↓φ semiquadrato.

Nam (uti priùs ostensum) figuræ VD↓φ adaptari potest spatium VDH; tale nimirum, ut ductâ quâvis ad curvam VH perpendiculari, ceu EP, sit AP sibi respondenti applicatæ AZ æqualis; (*b*) unde fiet spatium VAZφ $= \frac{AEq}{2}$; & VBZφ $= \frac{BFq}{2}$; & VCZφ $= \frac{CGq}{2}$ *&c.* quapropter omnia VAZφ × AZ + VBZφ × BZ + VCZφ × CZ, *&c.* æquabuntur omnibus AEq × AZ + BFq × BZ + CGq × CZ / 2 (*c*) hoc est τῷ $\frac{DHqq}{4 \times 2}$; (*b*) hoc est τῷ $\frac{VD↓φ \times VD↓φ}{2}$.

Præced. Lect. X. (*b*) *1 hujus.* Fig. 122.

(*c*) *3 hujus.*

V. Quòd si ducantur omnia √VAZφ, √VBZφ, √VCZφ, *&c.* in suas applicatas AZ, BZ, CZ, *&c.* respectivè proveniet aggregatum æquale duabus tertiis radicis quadratæ facti ex ipso spatio VD↓φ cubato (τῷ $\frac{2}{3}$ √VD↓φ³.)

Nam adaptatâ curvâ VH, est √VAZφ = AE√½; & √VBZφ = BF√½, & VCZφ = √CG√½; *&c.* Cùm itaque sint omnia

omnia $AZ \times AE + BZ \times BF + CZ \times CG$, &c. $= \frac{DH\,cub.}{3}$ erunt omnia $AZ \times \sqrt{VAZ\varphi} + BZ \times \sqrt{VBZ\varphi} + CZ \times \sqrt{VCZ\varphi}$, &c. $= \frac{DH\,cub}{3}\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\frac{DH^6}{18}}$. Eſt autem $DHq = 2\,VD\psi\varphi$, vel $DH^6 = 8\,VD\psi\varphi^3$; quapropter omnia $AZ \times \sqrt{VAZ\varphi} + BZ \times \sqrt{VBZ\varphi} + CZ \times \sqrt{VCZ\varphi}$, &c. $= \sqrt{\frac{8}{18} VD\psi\varphi^3} = \frac{2}{3}\sqrt{VD\psi\varphi^3}$.

VI. *Exempla.* Sit $VD\psi$ circuli quadrans (cujus radius dicatur R, & Peripheria P) ſegmenta VAZ, VBZ, VCZ, &c. in ſinus rectos AZ, BZ, CZ, &c. ducta conficient $\frac{RqPq}{8}$. Fig. 123.

Item Summa $AZ\sqrt{VAZ} + BZ\sqrt{VBZ} + CZ\sqrt{VCZ}$, &c. $= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{R^3P^3}{8}} = \sqrt{\frac{R^3P^3}{18}}$.

Si $VD\psi$ ſit parabolæ ſegmentum, factum è ſegmentis in applicatas erit $\frac{2}{9}\,VDq \times A\psi q$; ac è radicibus ſegmentorum in applicatas factum erit $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{8}{27}VD^3 \times D\psi^3}\ \sqrt{\frac{32}{243}VD^3 \times D\psi^3}$.

Similia plura de factis è *Segmentorum poteſtatibus*, *aut radicibus aliis in applicatas*, *aut ſinus ductis*, hinc extundi poſſent.

VII. E dictis porrò ſequitur, ſi omnes (vertici, & perpendicularibus interjectæ) VP per reſpectiva puncta A, B, C, &c. Concipiantur applicatæ, puta ut AY, BY, CY, &c. reſpectivis VP æquentur; erit è ſic applicatis *conſtitutum ſpatium* $AD\xi\theta$ *æquale ſemiſſe quadrati ex ſubtenſa* VH.

Nam, ob omnes $VA + VB + VC$, &c. $= \frac{VDq}{2}$; & omnes $AP + BP + CP$ &c. $= \frac{DHq}{2}$, liquet fore omnes $VP = \frac{VHq}{2}$.

VIII. Porrò, ſi (poſitis iiſdem) ſit curva $RXXS$ talis, ut ſit $IX = AP$, & $KX = BP$; & $LX = CP$, &c. erit *ſolidum factum ex*

ſpatio

spatio $VD\psi\varphi$ *circa axem* VD *rotato subduplum solidi ex spatio* $DRSH$, *itidem circa axem* VD *rotato, confecti*.

Nam ob $HL . LG :: PD . DH :: D\psi . DH :: D\psi q . D\psi \times DH :: D\psi q . HS \times DH$; erit $HL \times HS \times DH = LG \times D\psi q . = DC \times D\psi q$. Simili planè discursu erit $LK \times LX \times DL = CB \times CZq$; & $KI \times KX \times DK = BA \times BZq$, &c. atqui solidum prius est $\frac{\pi}{\delta} : AZq + BZq + CZq$, &c. & solidum posterius est $\frac{2\pi}{\delta} : DI \times IX + DK \times KX + DL \times LX$, &c. itaque constat Propositum.

Fig. 124. IX. Hæc itidem omnia simili ratione vera sunt, etiam si curva VEH rectæ VD convexas suas partes obvertat; nempe quovis in curva accepto puncto E; & per hoc ductâ EP ad curvam VEH perpendiculari, & EAY ad rectam VD normali, factâque $AZ = AP$; erit spatium $VD\psi = \frac{DHq}{2}$; Sin quoque fiat $AY = VP$; erit spatium $VD\xi = \frac{VHq}{2}$. Et pariter quoad cætera.

Ex his verò *Theorematis quam innumerarum magnitudinum* (ex ipsarum immediatè constructione) *dimensiones innotescant*, ab experientia facilè comperietur.

Fig. 125. X. Sit rursus curva quæpiam VH (cujus axis VD, basis DH) & linea $DZZO$ talis, ut à curvæ puncto quopiam, ceu E, ductâ rectâ ET, quæ curvam tangat, & rectâ EIZ ad basin parallelâ, sit qerpetuò IZ æqualis ipsi AT; dico *spatium* DHO *spatio* VDH *æquari*.

Æquisecetur enim recta DH indefinitè, punctis I, K, L, per quæ ducantur rectæ EIZ, FKZ, GLZ ad VD parallelæ, curvæque occurrentes ad E, F, G, unde ducantur rectæ EA, FB, GC ad HD parallelæ, rectæque ET, FT, GT (ut & HT) *curvam tangentes*; lineæ verò se, ut Schema monstrat, intersecent. Estque jam triangulum GLH simile triangulo TDH (nam ob divisionem istam indefinitam arculus GH rectæ instar censeri potest, eatenus tangenti HT coincidens) quare $LG . LH :: TD . DH$; & $LG \times DH = LH \times TD$; seu $CD \times DH = LH \times HO$. simili ratiocinio est $BC \times$ CG

$CG = KL \times LZ$; & $AB \times BF = IK \times KZ$, & $VA \times AE = DI \times IZ$. Verùm summa $CD \times DH + BC \times CG + AB \times BF + VA \times AE$ à spatio VDH minimè differt; & summa $LH \times DO + KL \times LZ + IK \times KZ + DI \times IZ$ à spatio DHO minimè differt. itaque spatio VDH, DHO æquantur.

Hoc *perutile Theorema* doctissimo Viro *D. Gregorio Aberdonensi* debetur; cui sequentia subnectimus.

XI. Iisdem positis; solidum ex spatio DHO circa axem VDR rotato factum duplum erit solidi facti ex spatio VDH itidem circa axem VD rotato. Fig. 125.

Nam est $HL . LG :: (DH . DT :: DH . HO ::) DHq . DH \times HO$. unde $HL \times DH \times HO = LG \times DHq = CD \times DHq$. Similique discursu sunt $LK \times DL \times LZ = BC \times CGq$. & $KI \times DK \times KZ = AB \times BFq$. & demum $ID \times DI \times IZ = VA \times AEq$. Est autem (ut vulgò notatum habetur) summa $CD \times DHq + BCB \times CGq + AB \times BFq + VA \times AEq$ dupla summæ $DI \times IE + DK \times KF + DL \times LG$, *&c.* Quare solidum ex spatio HDO circa axem DR converso factum duplum est solidi, quod è spatio VDH circa VD converso producitur.

XII. Hinc, summa $DI \times IZ + DK \times KZ + DL \times LZ$, &c. æquatur summæ quadratorum ex applicatis ad VD; scilicet ipsis $AEq + BFq + CGq$, &c.

XIII. Simili ratiocinio constabit summam $DIq \times IZ + DKq \times KZ + DLq \times LZ$, &c. triplam esse summæ $DIq \times IE + DKq \times KF + DLq \times LG$, &c. hoc est æqualem summæ cuborum ab omnibus AE, BF, CG, &c. ad VD applicatis. Idem quoad *reliquas potestates* observabilis est Conclusionum tenor.

XIV. Iisdem positis; si DXH sit linea talis, ut quævis ad DH ordinata, ceu IX, sit media proportionalis inter sibi congruas ordinatas IE, IZ; erit solidum ex spatio VDH circa axem DH rotato duplum solidi ex spatio DXH circa eundem axem DH converso procreati.

Nam ob $VA \times AE = DI \times IZ$, erit $VA \times AE \times EI = DI \times IZ \times IE = ID \times IXq$. Similique de causa $AB \times BF \times FK = IK \times KXq$; & $BC \times CG \times GL = KL \times LXq$, &c. Est autem summa $VA \times AE \times EI + AB \times BF \times FK + BC \times CG \times GL$, &c. Subdupla sum- In 10. hujus.

mæ VDq + EIq + FKq + GLq; ergò summa IXq + KXq + LXq + HXq, subdupla est summæ VDq — EIq + FKq + GLq. Vnde liquet Propositum.

XV. Quòd si curva DXH talis concipiatur, ut sit ordinata quæpiam, ceu IX, inter congruas ordinatas IE, IZ bimedia *; erit summa cuborum ex IX, KX, LX, &c. subtripla cuborum ex DV, IE, KF, &c. Sin IX sit trimed.* erit IXqq + KXqq + LXqq, &c. $= \frac{DVqq + IEqq + KFqq}{4}$ &c. ac ità porrò quoad cæteras potestates. * *Not.* bimediam appello, quæ duarum mediarum proportionalium prima; trimediam, quæ trium prima est, &c.

Hæc simili ratione colliguntur, ac comprobantur. piget κοκκύζειν.

XVI. Sit porrò linea VYQ talis, ut ordinata AY ipsi AT; & ordinata BY ipsi BT, &c. æquentur; erit IZq + KZq + LZq, &c. (summa quadratorum ex ordinatis à curva DZO ad rectam DH) æqualis summæ VA × AE × AY + AB × BF × BY + BC × CG × CY, &c. (hoc est figuræ VDH in figuram VDQ ductæ).

XVII. Item, summa IZ. cub. + KZ cub. + LZ cub. &c. = VA × AE × AYq + AB × BE × BYq + BC × CG × CYq, &c. *hoc est figura* VDH *in figura* VDQ *quadrata ducta*). Similis & aliarum *potestatum* est ratio.

Ad superiorum normam hæc facilè colliges.

XVIII. Eadem vera sunt, & omnino simili ratione comprobantur, Etiam si curvæ VH convexa rectæ VD obvertantur. Nempe, si linea DZO talis sit, ut ductâ per quodvis in curva VH punctum E tangente ET, & EA ad HD parallelâ, ac EIZ ad VD parallelâ, sit perpetim IZ = AT; erit spatium DHO spatio VDH æquale; & solidum factum ex spatio DHO circa axem VR converso duplum erit solidi ex spatio VDH circa eundem axem VD rotato producti. quin & reliqua pari modo convenient.

Fig. 126.

XIX Porrò, sit curva quæpiam AMB, cujus axis AD, & huic perpendicularis BD; tum alia sit linea KZL talis, ut sumpto in curva AB utcunque puncto M; & per hoc ductis rectâ MT curvam AB tangente, rectâ MFZ ad DB parallelâ (quæ lineam KL secet in Z, rectam AD in F) datâque quâdam lineâ R; sit TF. FM :: R.

Fig. 127.

R . F Z; erit spatium A D L K æquale rectangulo ex R, & D B.

Nam sit D H = R; & compleatur rectangulum B D H I; tum assumptâ M N indefinitè parvâ curvæ A B particulâ ducantur N G ad B D; & M E X, N O S ad A D parallelæ. Estque N O . M O :: T F . F M :: R . F Z. Unde N O × F Z = M O × R; hoc est F G × F Z = E S × E X. ergò cum omnia rectangula F G × F Z minimè differant à spatio A D L K; & omnia totidem rectangula E S × E X componant rectangulum D H I B, satìs liquet Propositum.

XX. Iisdem positis, sit curva P Y Q talis, ut sumpta in sumpta recta M X ordinata E Y (respectivæ) ipsi F Z æquetur, erit *summa quadratorum* ex F Z (ad rectam A D computata) par ei quod fit ex ipsa R in *spatium* D B Q B ducta.

Est enim F G . E S :: N O . M O :: R × F Z . F Z q :: R × E Y . F Z q. adeòque F G × F Z q = E S × R × E Y.

XXI. Simili ratione *summa Cuborum* ex FZ æquatur ei quod fit ex R in summam quadratorum ex rectis E Y ad B D applicatis, neque non simili quoad reliquas potestates tenore.

XXII. Sit curva quævis D O K, in qua designatum punctum D; & subtensa recta D K; sit item curva A E talis, ut à D projectâ quâvis rectâ D M F (quæ curvas secet punctis M, F) ductísque D S ad D M normali, & M S curvam D O K tangente (concurrentibus utiq; puncto S) datâque quâdam R, sit D S . 2 R :: D M q . D F q; erit spatium A D E æquale ex R, D K. Fig. 128.

Nam subtensa D K indefinitè secta concipiatur punctis P Q, &c. per quæ centro C descripti transeant arcus P M, Q R N; curvam D O K secantes punctis M, N; per quæ ducantur rectæ D M F, D N G; sint vero D T ad D K; & D S ad D M perpendiculares; quibus occurrant tangentes K T, M S. demùm centro D per E ducatur arcus E X, & per F arcus F Y. Jam, ob sectionem indefinitam, est triangulum K P M triangulo K D T simile. ac ideò M P . P K :: T D . D K. item est D P . P M :: D E . E X. seu, propter assignatam causam, D K . M P :: D E . E X. Est itaque M P × D K . P K × M P :: T D × D E . D K × E X. hoc est D K . P K :: T D × D E q . D K × E X × D E. ac inde D K q × E X × D E = P K × T D × D E q. (a) Est autem D T . 2 R :: D K q . D E q; seu D T × D E q = 2 R × D K q. ergò est D K q × E X × D E = P K × 2 R × D K q. quare E X × D E = 2 R × P K; hoc est, 2 sector D E X = 2 R × P K. unde sector D E X = R × P K. Simili planè discursu sector D F Y (a) Hyp.

 æquatur

æquatur ipsi $R \times RM$, vel $R \times QP$. itaque totum spatium ADE quod ab ejusmodi sectoribus minimè differt adæquatur toti $R \times DK$. quod erat Propositum.

Fig. 128. XXIII. Iisdem, quoad cætera, positis atque paratis, ducantur KH ad KT, & MI ad MS perpendiculares; & concipiatur jam curva AE naturâ talis, ut sit $DE = \sqrt{DK \times DH}$; & $DF = \sqrt{DM \times DI}$; ac ità perpetuò; erit spatium ADE quadrati ex DK subquadruplum.

Nam est $MP . PK :: DK . DH :: DKq . DK \times DH :: DKq . DEq$. item $DP . PM :: DE . EX$; hoc est $DK . PM :: DE . EX$. ergo $MP \times DK . PK \times PM :: DKq \times DE . DEq \times EX$. hoc est $DK . PK :: DKq . DE \times EX$. vel $DKq . DK \times PK :: DKq . DE \times EX$. unde $DK \times PK = DE \times EX$. Simili ratione $DM \times MR$ (vel $DP \times PQ$) $= DF \times FY$. Verùm omnia $DK \times PK$, $DP \times PQ$, &c. æquantur semissi quadrati ex DK; & omnia $DE \times EX$, $DF \times FY$, &c æquantur *duplo spatio* EDA; unde manifeste consequitur Propositum.

Fig. 129. XXIV. Sit curva quæpiam DOK, in qua punctum D; cuique subtendatur recta DK; sit item curva DZI talis, ut sumpto in curva DOK puncto quopiam M, connexâque DM; & ductâ DS ad DM perpendiculari, & MS curvam DOK tangente; sumptâ demum $DP = DM$, & ductâ PZ ad DK perpendiculari, sit $PZ = DS$; erit *spatium* DKI æquale *duplo spatio* $DKOD$.

Nam recta KP concipiatur indefinitè parva; & DT ipsi DK perpendicularis sit, & KT curvam DOK tangat. Est itaque (ducto arcu MP) rursus $KP . PM :: KD . DT :: KD . KI$. unde $KP \times KI = PM \times KD$. Capiatur alia particula PQ, & centro D per Q ducatur arcus QN, quem secet subtensa DM in R; est ergo rursus $MR . RN :: MD . DS$; hoc est $PQ . RN :: MD . PZ$ quare $PQ \times PZ = RN \times MD$; ac ità continuò deinceps. patet igitur omnia simul rectangula $KP \times KI$, $PQ \times PZ$, &c. æquari aggregato omnium $PM \times KD$, $RN \times MD$, &c. hoc est spatium DKI duplo spatio $DKOD$ æquari.

Fig. 130. XXV. Iisdem quoad cætera positis atque paratis, ordinatæ PZ jam æquales concipiantur ipsis MS respectivis; & ad rectam assumptam Xk, distantiásque Xk, Xm, Xn, &c, æquales ipsis curvæ partibus DOK, DOM, DON, &c. applicentur rectæ kd, md, nd, &c. pares

pares subtensis KD, MD, ND; &c. erit spatium X$k$$d$ æquale spatio DKI.

Nam est KM.KP::KT.KD; hoc est km.KP::KI.kd. unde $km \times kd =$ KP × KI. Similique pacto, MN.MR::MS. MD. seu mn.PQ:: PZ. md. unde $mn \times md =$ PQ × PZ. ac ità deinceps. unde constat Propositum.

XXVI. Sin porrò, persistentibus reliquis, adsumptâ quâvis rectâ. kg, completóque rectangulo Xkgh, curva DZI talis intelligatur, ut sit MD.MS::kg.PZ; erit rectangulum Xkgh æquale spatio DKI. Fig. 130.

Nam est rursus KP.KM::KD.KT::kg.KI. adeóque KP × KI = (KM × kg =) $km \times kg$. Similitérque PQ × PZ = $mn \times kg$. ac ità semper. Unde constat.

Hinc noto spatio DKI cognoscetur quantitas curvæ DOK.

Hujusmodi verò complura deprehendet quisquis hanc *Mineram* penitiùs explorârit, ac excusserit. Faciat cui id vacat & adlubescit

XXVII. Usui fortè nonnunquam erit (mihi subinde fuit) & hoc, è præmissis deductum Theorema. Fig. 131.

Sit curva quæpiam VEH (cujus axis VD, basis DH) quam tangat utcunque recta ET; & ducatur EA ad HD parallela. tum altera statuatur curva GZZ talis, ut à puncto E ductâ rectâ EZ ad VD parallelâ (quæ basin DH in I, curvam GZZ in Z secet) adsumptâq; quâpiam determinatâ R, sit semper DAq.Rq::DT.IZ; erit DA.AE::Rq spat. DIZG. (vel facto DA. R::R.DP; ductâque PQ ad DH parallelâ, erit *Rectangulum* DPQI par *spatio* DGZI).

Etiam hoc adjiciatur *Theorema*; nonnunquam usui futurum.

XXVIII. Sit curva qualibet AMB (cujus axis AD); sit item linea KZL proprietate talis, ut sumpto in AMB quocunque puncto M, & ab eo ductis rectâ MP ad curvam AB perpendiculari (quæ axem AD secet in P) & rectâ MG ad AD perpendiculari (quæ curvam KZL secet in Z) sit constantèr GM.MP:: arc AM. GZ; erit *spatium* ADKL æquale *semissi quadrati* ex arcu AM. Fig. 132.

Hæc inquam, è præcedentibus haud magnâ operâ colligantur, id verò sufficiat admonitum; etenim hic animus est paulo subsistere.

APPEN-

APPENDICULA.

I. Cum pridem ante plures annos illustris Viri, *Christiani Hugenii*, *Cyclometrica* lustrarem, ac in eo versatus adverterem ad id negotii duas præsertim ab ipso methodos adhiberi; quarum una *Circuli segmentum* duobus parabolicis (uni inscripto, alteri adscripto) medium esse monstrans, illius inde magnitudini limites præscribit; altera *Parabolici segmenti*, & *Parallelogrammi* æquè altorum centris gravitatum medium interjacere centrum gravitatis circularis segmenti ostendens, alteros exindè limites, adsignat; incidit mihi cogitatio posse loco parabolæ in prima methodo, nec non vice Parallelogrammi in secunda, paraboliformium aliquam circulari segmento circumscriptibilem usurpari, sic ut res aliquanto propiùs attingatur; id mox verum esse re perpensâ comperi; quin & præterea notavi facilè suppares methodos *Hyperbolici segmenti dimensioni* accommodari. Quorum demonstratio (præ aliis fortasse, quæ excogitari possent) brevis & clara cùm è suprà positis consequatur aut pendeat, eam (alioquin opinor haud injucundam) hîc visum est apponere.

Fig. 133. II. Adsumimus autem hæc pervulgata; quorúmque demonstrationes è præmonstratis haud difficilè variis modis colligantur; si *paraboliformis* BAE (cujus *Axis* AD, *Basis* vel ordinata BDE, *Tangens* BT; *Gravitatis centrum* K) exponens sit $\frac{n}{m}$; erit *Area* BAE $= \frac{m}{n+m}$ AD × BE; & TD $= \frac{m}{n}$ AD, & KD $= \frac{m}{n+2m}$ AD.

Fig. 134. III. Sint duæ quævis curvæ AEB, AFB (quarum communis axis AD, ordinata DB) itâ se habentes, ut ductâ quâcunque rectâ EFG ad BD parallelâ, quæ lineas expositas punctis E, F, G secet, positóque quòd rectæ ES, FT tangant curvas, (illa curvam AEB, hæc ipsam

ipsam A F B) sit perpetuo T G major quàm S G; dico nullam curvæ A F B partem intra ipsam A E B cadere.

Si fieri potest, cadat pars N F M; ità scilicet ut curva A F B curvam A E B intersecet punctis M, N; his autem interjecta concipiatur indeterminatè ordinata E F G; sint verò lineæ L X K, R Y Q tales, ut ductis rectis E O, F P ad ipsas E S, F T perpendicularibus, protractâque rectâ E G, ut hæc dictas lineas L K, Q R secet punctis X, Y, sit G X = G O, & G Y = G P. Jam ex ostensis patet esse *spatium* $IHKL = \frac{HMq - INq}{2}$ = spat. IHQR; adeóq; spat. IHKL, IHQR æquari. Verùm ob GE. GO (GX) : : SG. GE. $\sqsubset$ SG. GF $\sqsubset$ TG. GF : : GF. GP (GY) $\sqsubset$ GE. GY; est G X $\sqsubset$ GY; adeoque (cùm hoc ubique similiter contingat) spatium I H K L majus spatio IHQR; quod repugnat ostenso. itaque liquet Propositum.

Hinc tota AFB extra totam AEB jacet, nec illa hanc usquam intersecat.

IV. Sit curva quæpiam B A E, cujus axis A D, & ad hunc ordinata basis A D E; segmenti verò B A E centrum gravitatis sit punctum H, per quod ducta sit recta R S ad B E parallela. Porrò per puncta R, S transeat altera curva (vel linea quævis) M R A S N, habens itidem axin A D, ac ità priorem curvam B A E secans, ut ejusce pars superior R K A P S intra curvam B A E cadat, inferiores verò reliquæ partes R M, S N extra eandem; erit segmenti M R A S N centrum gravitatis infra punctum H, versus basin M N. Fig. 135.

Nam è segmento R I A O S ablatum R I A K + A O S P residuum B R K A P S E deprimet versus basin B E, puta ut jam sit hujus residui *Centrum gravitatis* ad X; tunc adjunctum B R M + E S N adhuc totum M R K A P S N magìs deprimet; adeoque centrum ejus infra X consistet, velut ad Y. itaque constat Propositum.

V. *Circulum* A F B, cujus *Centrum* C, tangant duæ rectæ BT, E S *Diametro* C A occurrentes punctis T, S; & ad C A perpendiculares sint rectæ B D, E P; sit autem A D major quàm A P; erit T D. AD $\sqsubset$ S P. A P. Fig. 136.

Nam est C T. C A : : C A. C D. Ideoque CT − CA. CA − CD : : CT. CA; hoc est TA. AD : : CT. CA. Simili ratione constabit esse S A. AP : : CS. CA. Est autem C T. C A $\sqsubset$ CS. C A. quare T A. A D $\sqsubset$ S A. A P. vel componendo T D. A D $\sqsubset$ SP. A P.

VI. *Hyper-*

VI. *Hyperbolam* A E B, cujus *Centrum* C, tangant duæ rectæ
Fig. 137. B T, E S, & reliqua ponantur ut in proximè præcedente; erit T D : A D $-\!\sqsupset$ S P . A P.

Nam est C A . C D :: C T . C A . unde C A — C T . C D — C A :: C T . C A; hoc est T A . A D :: C T . C A. suppare discursu, est S A . A P :: C S . C A. Verùm est C T . C A $-\!\sqsupset$ C S . C A. quare T A . A D $-\!\sqsupset$ S A . A P; seu componendo T D . A D $-\!\sqsupset$ S P . A P.

VII. *Circuli* A E B (cujus *Centrum* C) & *paraboliformis* A F B communes sint axis A D, & basis B D; sit autem *paraboliformis* exponens $\frac{n}{m}$; & A D $= \frac{m - 2n}{m - n}$ C A (vel $m - n . m - 2n$ :: C A . A D) *circulum* verò tangat recta B T; hæc quoque *paraboliformem* A F B continget.

Fig. 138. Nam quia B T *circulum* tangit, est C T . C A :: C A . C D; unde T A . A D :: C A . C D componendòque T D . A D :: C A + C D . C D Item, quoniam est (ex hypothesi) C A . A D :: $m - n . m - 2n$; erit per rationis conversionem C A . C D :: $m - n . n$. & componendo C A + C D . C D :: $m . n$. hoc est T D . A D :: $m . n$. unde (*a*) palam fit,
(*a*) 2 *hujus ap.* quòd B T *paraboliformem* A F B tangit.

VIII. Subnotetur, quòd inversè, datâ ratione ipsius A D ad C A designabitur hinc *paraboliformis*; quæ *Circulum* A E B ad B continget. Nempe, si A D $= \frac{s}{t}$, erit $\frac{t - s}{2t - s}$ dictæ *paraboliformis* exponens. Nam posito fore $\frac{t - s}{2t - s} = \frac{n}{m}$; erit ideò (juxta crucem multiplicando) $mt - ms = 2tn - sn$; & transponendo $mt - 2nt = ms - ns$. ac ideò (æqualitatem ad analogismum redigendo) $m - n . m - 2n :: t . s$ :: C A . A D. itaque constat ex antecedente Propositum.

IX. Manente quoad cætera septimæ hypothesi, *paraboliformis* A F B extra *circulum* A E B tota cadet.

Fig. 139. Nam utcunque ducatur recta G E F ad D B parallela; quæ secet circulum ad E, paraboliformem in F; ductæque concipiantur rectæ E S *circulum*, & recta F R *paraboliformem* contingentes; Estque R G.

RG . AG : : (a) $m . n$: : TD . AD (b) ⊏ SG . AG. quare RG ⊏ SG. unde (c) patet tota AFB extra circulum AEB jacere. (a) 2. hujus. app. (b) 5. hujus ap. (c) 3. hujus ap.

X. Reliquis itidem stantibus, si ad basin GE (utcunque parallelam ipsi DB) & axem AD constituta intelligatur *paraboliformis* ejusdem cum ipsa AFB generis (nempe cujus etiam exponens $\frac{n}{m}$) illa ad partes A supra GE, extra *circulum* tota jacebit. Fig. 139.

Nam in arcu AE accepto quocunque puncto M, ductâque MP ad EG parallelâ, & MV circulum tangente; est VP . AP ⊐ SG . AG ⊐ RG . AG : : $m . n$; (a) itaque rursus liquet Propositum. (a) 3. hujus ap.

XI. Consectatur etiam dictam (ipsi AFB coordinatam & ad basin GE constitutam) *paraboliformem* infra GE ad DB protractam, catenus intra *Circulum* totam cadere, Fig. 139.

Quòd intra *Circulum* statim infra EG cadet ex eo patet, quòd ipsam tangens RE circulum secat (quia nempe SE circulum tangit). quòd alibi *Circulo* non occurret hinc patet; quoniam posito quòd occurrat uspiam ad N, (a) tota supra N extra circulum caderet, contra quam modò dictum ac ostensum est. (a) 3. hujus ap.

XII. Porrò, *Hyperbola* AEB (cujus centrum C) & *paraboliformis* AFB, cujus exponens $\frac{n}{m}$, communes sint axis AD, basis DB; sit autem AD $= \frac{2n - m}{m - n}$ CA; & BT *hyperbolam* tangat; hæc quoque *paraboliformem* AFB continget. Fig. 140.

Nam est CD . CA : : CA . CT . ac indè AD . TA : : CD . CA; inverséq; componendo TD . AD : : CA + CD . CD. Verùm ex hypothesi, est $m - n . 2n - m$: : CA . AD; adeoque inversè componendo CA . CD : : $m - n . n$; & rursus componendo CA + CD . CD : : $m . n$. hoc est TD . AD : : $m . n$. unde BT *hyperboliformem* contingit.

XIII. Hinc rursu datâ ratione ipsius AD ad CA, *paraboliformis* ad punctum B *hyperbolam* contingens designabitur. nempe sit AD $= \frac{s}{t}$ CA; erit $\frac{n}{m} = \frac{t + s}{2t + s}$. Nam hoc supposito erit (*conversè*

O mul-

multiplicando) $2tn + sn = mt + ms$. vel transponendo $2nt - mt = ms - ns$. unde $m - n . 2n - m :: t . s ::$ CA.AD. ergò patet ex antecedente.

XIV. Stante duodecimæ hypothesi, *paraboliformis* AFB intra hyperbolam AEB tota cadet.

Fig. 141. Nam utcunque ducatur EFG ad BD parallela; & recta ER *hyperbolam*, recta FS *paraboliformem* tangant. Estque SG.AG :: (a) $m . n$ :: TD.AD (b) $\sqsupset$ RG.AG. unde RG $\sqsubset$ SG. (c) unde curva AEB extra curvam AFB tota cadet.

(a) 2 hujus ap.
(b) 5. hujus ap.
(c) 3. hujus ap.

XV. Etiam, si reliquis perstantibus, ad basin GE, axin AG constitutam imagineris ejusdem ordinis *paraboliformem*; hæc ad partes ipsâ GE superiores intra *hyperbolam* tota cadet.

Fig. 141. Nam si in *curva hyperbolica* AE sumatur ubicunque punctum M, & ordinetur MP, ducatúrque hyperbolam tangens MV; erit VP.AP $\sqsubset$ $m . n$. adeoque rursus è tertia liquet Propositum.

XVI. Quinetiam si hæc altera coordinata *paraboliformis*, ad basin EG constituta, ad DB protracta concipiatur, ejus ipsis EG, BD intercepta pars extra *hyperbolam* tota cadet.

Fig. 141. Nam quòd extra *hyperbolam* infra EG cadit, exinde patet, quòd ipsa cum ipsius tangente recta ES angulum efficit minorem eo, quem eadem recta ES efficit cum recta RE hyperbolam tangente. quòd autem eadem alibi, velut ad N, *hyperbolæ* non occurrit, patet; quoniam hoc posito, (a) ipsa intra *hyperbolam* AN tota consisteret, contra quàm mox ostensum est.

(a) 3. hujus ap.

XVII. Habeant *Circulus* AEB, & *Parabola* AFB communem axem AD, & basin DB; *parabola* ad partes supra BD intra *Circulum*; at infra BD extra *circulum* cadet.

Fig. 142. Sit enim *Circuli Diameter* AZ, & ei æqualis AH ad BD parallela, & connectatur ZH; & huic BD producta ad I; ergo DI est *Parameter parabolæ* AFB. quòd si supra BD utcunquè ducatur recta EFGK ad BD parallela circulum secans in E, parabolam in F, rectas AZ, HZ, in G, & K, patet esse GEq = AG × GK $\sqsubset$ AG × DI = GFq. unde GE $\sqsubset$ GF. Item, si infra BD utcunque ducatur recta MNOL ad BD parallela *parabolam* secans in M, *circulum* in N, rectas AZ, HZ in O, & L, itidem patet esse MOq = AO × DI $\sqsubset$ AO × OL = NOq. & ideò MO $\sqsubset$ NO.

$\sqsubset NO$. quare liquent ea, quæ Proposita sunt.

Si *Circulo* substituatur *Ellipsis*, eadem conclnsio valet idem discursus probat; positâ A H *Ellipsis parametro*.

XVIII Habeant *hyperbola* A E B (cujus axis A Z, parameter A H) & *parabola* A F B axin eundem A D, & basin D B, *parabola* supra D B tota extra *hyperbolam* cadet, extra vero, si infra D B protrahatur. Fig. 143.

Nam connexæ Z H occurrat B D in I; ergò D I est *parabolæ parameter*. Quòd si supra B D utcunque ducatur recta F E G K ad B D parallela, secans hyperbolam in E, parabolam in F, rectas A D, Z H punctis G, K, erit $FGq = AG \times DI \sqsubset AG \times GK = EGq$. quare $FG \sqsubset EG$. Quòd si infra B D, utcunque ducatur recta MNOL secans hyperbolam in N, parabolam in M, rectas A D, Z H in O, & L, erit $NOq = AO \times OL \sqsubset AO \times DI = MOq$. & indè $NO \sqsubset MO$. unde constant ea quæ proposita sunt.

XIX. E dictis eliciuntur hæ *ad Circuli dimensionem pertinentes regulæ*. Sit B A E circuli portio, cujus axis A D, basis B E; sitque C centrum circuli, & E H sinus rectus arcus B A E; item, sit $AD = \frac{s}{t} CA$; erit 1. $\frac{2t-s}{3t-2s} AD \times BE \sqsubset$ port. B A E. Fig. 144.

2. $EH + \frac{4t-2s}{3t-2s} BH \sqsubset$ arc. B A E.

3. $\frac{2}{3} AD \times BE \sqsupset$ port. B A E.

4. $EH + \frac{4}{3} BH \sqsupset$ arc. B A E.

XX. Itidem hæ deducuntur ad *hyperbolæ dimensionem spectantes regulæ*. Sit *hyperbolæ* (cujus centrum C) segmentum A D B, habens axin $AD = \frac{s}{t} CA$; & basin D B; Fig. 145.

erit 1. $\frac{2t+s}{3t+2s} AD \times DB \sqsupset$ segm. A D B. &

2. $\frac{2}{3} AD \times DB \sqsubset$ segm. A D B.

XXI. Porrò, sit *circuli* (cujus centrum C) segmentum B A E, cujus axis A D, & *gravitatis centrum* K; ponatur autem $AD = \frac{s}{t} CA$, & $HD = \frac{2t - s}{5t - 3s} AD$; erit H D major ipsâ K D.

Fig. 146. Nam per H ducatur recta O P ad B E parallela; éstque punctum
(a) 2. hujus ap. H (a) centrum *gravitatis paraboliformis*, (puta A F B) ad basin B E
(b) 8. hujus ap. constitutæ, cujus exponens $\frac{t - s}{2t - s}$ &(b) quæ proinde circulum AEB tangit; (nam si $\frac{t - s}{2t - s} = \frac{n}{m}$; erit $\frac{2t - s}{5t - 3s} = \frac{m}{n + 2m}$) & proinde H (a) erit centrum gravitatis *paraboliformis* isti coordinatæ per O, P transeuntis, & ad basin B E pertingentis. Hæc autem supra O
(c) 10. hujus ap P (c) extra *circulum* cadit, & infra O P (d) intra ipsum; (e) adeóque
(d) 11 hujus ap punctum H supra K situm est.
(e) 4. hujus ap.

Fig. 146. XXII. Sin punctum L sit *centrum gravitatis parabolæ*, erit L infra K situm; adeóque $KD \sqsubset \frac{2}{5} AD$. Patet ex 4, & 17 hujus appendiculæ.

Fig. 147. XXIII. Sit *Hyperbola* (cujus centrum C) *segmentum* B A E, cujus axis A D, basis B E; gravitatis centrum K; ponatur autem $AD = \frac{s}{t} CA$, & $HD = \frac{2t + s}{5t + 3s} AD$; erit H D minor ipsâ K D.

(a) 2. hujus. ap. Nam per H ducatur recta O P ad B E parallela (a). Estque punctum H centrum gr. *paraboliformis*, puta A F B, ad basin D B. constitutæ,
(b) 13. hujus ap cujus exponens $\frac{t + s}{2t + s}$; (b) quæ & *Hyperbolam* ad B contingit (nam si $\frac{t + s}{2t + s} = \frac{n}{m}$; erit $\frac{2t + s}{5t + 3s} = \frac{m}{n + 2m}$) (a) quare H erit centrum gravitatis paraboliformis isti coordinatæ per O, P ductæ, & ad BE
(c) 15. hujus ap. pertingentis. hæc autem supra O P (c) intra hyperbolam cadit;
(d) 16 hujus ap & infra O P (d) extra illam; (e) inde punctum K supra H
(e) 4. hujus ap. existit.

XXIV. Parabolæ centrum gr. (puta L) supra K existit, adeóque $KD \sqsupset \frac{2}{5} AD$. Patet ex 4, & 18 hujus appendiculæ.

XXV. Nè

XXV. Nè ſpeculatio præſens, *ob hujuſmodi complures methodos Cyclometricas indies promulgatas*, aſpernanda videatur, adjungemus conſectarium unum vel alterum, quibus fortè ſolis hæc paucula meruerant impendi; à quibus nempe *Maxima*, *Minimaque* ſui generis innumera determinantur. Fig. 148.

Sit *Semicirculus* ABZ, cujus centrum C; ſitque *ſegmentum* ADB; & huic adſcripta *paraboliformis* AFB, cujus exponens $\frac{n}{m}$; ſit item $AD = \frac{m-2n}{m-n} CA$; *paraboliformis* autem *parameter* (hoc eſt recta, cujus aliqua poteſtas in poteſtatem ſegmenti axis, ſeu AD, ducta conficit poteſtatem ordinatæ, ceu DB) nominetur p; erit p in ſuo genere *maximum*.

Nam utcunque ducatur GE ad DB parallela, & ad GE poſita concipiatur *paraboliformis*, ipſi AFB coordinata, cujus *parameter* dicatur q. quum ergò *paraboliformis* AFB *circulum* extrorſum contingat, erit $GF \sqsubset GE$; adeóque $GF^{m} \sqsubset GE^{m}$; hoc eſt $p^{m-n} \times AG^{n} \sqsubset q^{m-n} \times AG^{n}$; quare $p \sqsubset q$.

Notandum eſt eſſe $p^{2m-2n} = ZD^{m} \times AD^{m-2n}$. & $q^{2m-2n} = ZG^{m} \times AG^{m-2n}$. unde $ZD^{m} \times AD^{m-2n} \sqsubset ZG^{m} \times AG^{m-2n}$. quare $ZD^{m} \times AD^{m-2n}$ eſt maximum.

Exemp. 1. Sit $n = 1$, & $m = 3$. erit ideò $p^{4} = ZD^{3} \times AD = ZDq \times BDq$; vel $p^{2} = ZD \times BD$. Item $AD = \frac{1}{2} CA$.

2. Sit $n = 3$, & $m = 10$. erit $p^{14} = ZD^{10} \times AD^{4}$. vel $p^{7} = ZD^{5} \times AD^{2} = ZD^{3} \times BD^{4}$. & $AD = \frac{4}{7} CA$.

XXVI Sit item *hyperbola* (æquilatera) cujus centrum C, axis ZA; & huic inſcripta *paraboliformis* AFB cujus exponens $\frac{n}{m}$ *parameter* p; ſitque $AD = \frac{2n-m}{m-n} CA$; erit p ſui generis maximum. Fig. 149.

Nam utcunque ducatur EG ad BD parallela; & ad EG conſtituta intelligatur *paraboliformis*, ipſi AFB coordinata, cujus *parameter* q. quum ergo *paraboliformis* AFB *hyperbolam* introrſum contingat, erit $GF^{m} \sqsupset GE^{m}$; hoc eſt $p^{m-n} \times AG^{n} \sqsupset q^{m-n} \times AG^{n}$; quare $p \sqsupset q$.

Notandum

spatio V D ψ φ *circa axem* V D *rotato subduplum solidi ex spatio* D R S H, *itidem circa axem* V D *rotato, confecti*.

Nam ob H L . L G :: P D . D H :: D ψ . D H :: D ψ *q* . D ψ × D H :: D ψ *q* . H S × D H ; erit H L × H S × D H = L G × D ψ *q*. = D C × D ψ *q* . Simili planè discursu erit L K × L X × D L = C B × C Z *q* ; & K I × K X × D K = B A × B Z *q* , &c. atqui solidum prius est $\frac{\varpi}{\delta}$: A Z *q* + B Z *q* + C Z *q*, &c. & solidum posterius est $\frac{2\varpi}{\delta}$: D I × I X + D K × K X + D L × L X , &c. itaque constat Propositum.

Fig. 124. IX. Hæc itidem omnia simili ratione vera sunt, etiam si curva VEH rectæ V D convexas suas partes obvertat ; nempe quovis in curva accepto puncto E ; & per hoc ductâ E P ad curvam V E H perpendiculari, & E A Y ad rectam V D normali, factâque A Z = A P ; erit spatium V D ψ $= \frac{DHq}{2}$; Sin quoque fiat A Y = V P ; erit spatium V D ξ $= \frac{VHq}{2}$. Et pariter quoad cætera.

Ex his verò *Theorematis quam innumerarum magnitudinum* (ex ipsarum immediatè constructione) *dimensiones innotescant* , ab experientia facilè comperietur.

Fig. 125. X. Sit rursus curva quæpiam V H (cujus axis V D, basis D H) & linea D Z Z O talis, ut à curvæ puncto quopiam, ceu E, ductâ rectâ E T, quæ curvam tangat, & rectâ E I Z ad basin parallelâ, sit qerpetuò I Z æqualis ipsi A T ; dico *spatium* D H O *spatio* V D H *æquari*.

Æquisecetur enim recta D H indefinitè , punctis I, K, L, per quæ ducantur rectæ E I Z, F K Z, G L Z ad V D parallelæ, curvæque occurrentes ad E, F, G, unde ducantur rectæ E A, F B, G C ad H D parallelæ, rectæque E T, F T, G T (ut & H T) *curvam tangentes* ; lineæ verò se, ut Schema monstrat, intersecent. Estque jam triangulum G L H simile triangulo T D H (nam ob divisionem istam indefinitam arculus G H rectæ instar censeri potest , eatenus tangenti H T coincidens) quare L G . L H :: T D . D H ; & L G × D H = L H × T D ; seu C D × D H = L H × H O . simili ratiocinio est B C ×
C G

$CG = KL \times LZ$; & $AB \times BF = IK \times KZ$, & $VA \times AE = DI \times IZ$. Verùm summa $CD \times DH + BC \times CG + AB \times BF + VA \times AE$ à spatio VDH minimè differt; & summa $LH \times DO + KL \times LZ + IK \times KZ + DI \times IZ$ à spatio DHO minimè differt. itaque spatio VDH, DHO æquantur.

Hoc *perutile Theorema* doctissimo Viro *D. Gregorio Aberdonensi* debetur; cui sequentia subnectimus.

XI. Iisdem positis; solidum ex spatio DHO circa axem VDR rotato factum duplum erit solidi facti ex spatio VDH itidem circa axem VD rotato. Fig. 125.

Nam est $HL . LG :: (DH . DT :: DH . HO ::) DHq . DH \times HO$. unde $HL \times DH \times HO = LG \times DHq = CD \times DHq$. Similique discursu sunt $LK \times DL \times LZ = BC \times CGq$. & $KI \times DK \times KZ = AB \times BFq$. & demum $ID \times DI \times IZ = VA \times AEq$. Est autem (ut vulgò notatum habetur) summa $CD \times DHq + BCB \times CGq + AB \times BFq + VA \times AEq$ dupla summæ $DI \times IE + DK \times KF + DL \times LG$, *&c.* Quare solidum ex spatio HDO circa axem DR converso factum duplum est solidi, quod è spatio VDH circa VD converso producitur.

XII. Hinc, summa $DI \times IZ + DK \times KZ + DL \times LZ$, &c. æquatur summæ quadratorum ex applicatis ad VD; scilicet ipsis $AEq + BFq + CGq$, &c.

XIII. Simili ratiocinio constabit summam $DIq \times IZ + DKq \times KZ + DLq \times LZ$, &c. triplam esse summæ $DIq \times IE + DKq \times KF + DLq \times LG$, &c. hoc est æqualem summæ cuborum ab omnibus AE, BF, CG, &c. ad VD applicatis. Idem quoad *reliquas potestates* observabilis est Conclusionum tenor.

XIV. Iisdem positis; si DXH sit linea talis, ut quævis ad DH ordinata, ceu IX, sit media proportionalis inter sibi congruas ordinatas IE, IZ; erit solidum ex spatio VDH circa axem DH rotato duplum solidi ex spatio DXH circa eundem axem DH converso procreati.

Nam ob $VA \times AE = DI \times IZ$, erit $VA \times AE \times EI = DI \times IZ \times IE = ID \times IXq$. Similique de causa $AB \times BF \times FK = IK \times KXq$; & $BC \times CG \times GL = KL \times LXq$, &c. Est autem summa $VA \times AE \times EI + AB \times BF \times FK + BC \times CG \times GL$, &c. Subdupla sum- *In 10. hujus.*

 mæ

mæ $VDq + EIq + FKq + GLq$; ergò summa $IXq + KXq + LXq + HXq$, subdupla est summæ $VDq - EIq + FKq + GLq$. Unde liquet Propositum.

XV. Quòd si curva DXH talis concipiatur, ut sit ordinata quæpiam, ceu IX, inter congruas ordinatas IE, IZ bimedia *; erit summa cuborum ex IX, KX, LX, &c. subtripla cuborum ex DV, IE, KF, &c. Sin IX sit trimed.* erit $IXqq + KXqq + LXqq, \&c. = \frac{DVqq + IEqq + KFqq}{4}$ &c. ac ità porrò quoad cæteras potestates. * *Not.* bimediam appello, quæ duarum mediarum proportionalium prima; trimediam, quæ trium prima est, &c.

Hæc simili ratione colliguntur, ac comprobantur. piget κοκκύζειν.

XVI. Sit porrò linea VYQ talis, ut ordinata AY ipsi AT; & ordinata BY ipsi BT, &c. æquentur; erit $IZq + KZq + LZq$, &c. (summa quadratorum ex ordinatis à curva DZO ad rectam DH) æqualis summæ $VA \times AE \times AY + AB \times BF \times BY + BC \times CG \times CY$, &c. (hoc est figuræ VDH in figuram VDQ ductæ).

XVII. Item, summa IZ. cub. + KZ cub. + LZ cub. &c. = $VA \times AE \times AYq + AB \times BE \times BYq + BC \times CG \times CYq$, &c. *hoc est figura* VDH *in figura* VDQ *quadrata ducta*). Similis & aliarum *potestatum* est ratio.

Ad superiorum normam hæc facilè colliges.

XVIII. Eadem vera sunt, & omnino simili ratione comprobantur,
Fig. 126. Etiam si curvæ VH convexa rectæ VD obvertantur. Nempe, si linea DZO talis sit, ut ductâ per quodvis in curva VH punctum E tangente ET, & EA ad HD parallelâ, ac EIZ ad VD parallelâ, sit perpetim IZ = AT; erit spatium DHO spatio VDH æquale; & solidum factum ex spatio DHO circa axem VR converso duplum erit solidi ex spatio VDH circa eundem axem VD rotato producti. quin & reliqua pari modo convenient.

XIX Porrò, sit curva quæpiam AMB, cujus axis AD, & huic perpendicularis BD; tum alia sit linea KZL talis, ut sumpto in curva
Fig. 127. AB utcunque puncto M; & per hoc ductis rectâ MT curvam AB tangente, rectâ MFZ ad DB parallelâ (quæ lineam KL secet in Z, rectam AD in F) datâque quâdam lineâ R; sit TF. FM :: R.

R . F Z ; erit spatium A D L K æquale rectangulo ex R, & D B.

Nam sit D H = R ; & compleatur rectangulum B D H I ; tum assumptâ M N indefinitè parvâ curvæ A B particulâ ducantur N G ad B D ; & M E X, N O S ad A D parallelæ. Estque N O . M O :: T F . F M :: R . F Z. Unde N O × F Z = M O × R ; hoc est F G × F Z = E S × E X. ergò cum omnia rectangula F G × F Z minimè differant à spatio A D L K ; & omnia totidem rectangula E S × E X componant rectangulum D H I B, satis liquet Propositum.

XX. Iisdem positis, sit curva P Y Q talis, ut sumpta in sumpta recta M X ordinata E Y (respectivæ) ipsi F Z æquetur, erit *summa quadratorum* ex F Z (ad rectam A D computata) par ei quod fit ex ipsa R in *spatium* D B Q B ducta.

Est enim F G . E S :: N O . M O :: R × F Z . F Z q :: R × E Y . F Z q. adeóque F G × F Z q = E S × R × E Y.

XXI. Simili ratione *summa Cuborum* ex F Z æquatur ei quod fit ex R in summam quadratorum ex rectis E Y ad B D applicatis, neque non simili quoad reliquas potestates tenore.

XXII. Sit curva quævis D O K, in qua designatum punctum D ; & subtensa recta D K ; sit item curva A E talis, ut à D projectâ quâvis rectâ D M F (quæ curvas secet punctis M, F) ductísque D S ad D M normali, & M S curvam D O K tangente (concurrentibus utiq; puncto S) datâque quâdam R, sit D S . 2 R :: D M q . D F q ; erit spatium A D E æquale ex R, D K. Fig. 128.

Nam subtensa D K indefinitè secta concipiatur punctis P Q, &c. per quæ centro C descripti transeant arcus P M, Q R N ; curvam D O K secantes punctis M, N ; per quæ ducantur rectæ D M F, D N G ; sint vero D T ad D K ; & D S ad D M perpendiculares ; quibus occurrant tangentes K T, M S. demùm centro D per E ducatur arcus E X ; & per F arcus F Y. Jam, ob sectionem indefinitam, est triangulum K P M triangulo K D T simile. ac ideò M P . P K :: T D . D K. item est D P . P M :: D E . E X. seu, propter assignatam causam, D K . M P :: D E . E X. Est itaque M P × D K . P K × M P :: T D × D E . D K × E X. hoc est D K . P K :: T D × D E q. D K × E X × D E. ac inde D K q × E X × D E = P K × T D × D E q. (*a*) Est autem D T . 2 R :: D K q . D E q ; seu D T × D E q = 2 R × D K q. ergò est D K q × E X × D E = P K × 2 R × D K q. quare E X × D E = 2 R × P K ; hoc est, 2 sector D E X = 2 R × P K. unde sector D E X = R × P K. Simili planè discursu sector D F Y (*a*) Hyp.

æquatur ipsi R × R M, vel R × QP. itaque totum spatium ADE quod ab ejusmodi sectoribus minimè differt adæquatur toti R × DK. quod erat Propositum.

Fig. 128. XXIII. Iisdem, quoad cætera, positis atque paratis, ducantur KH ad KT, & MI ad MS perpendiculares; & concipiatur jam curva AE naturâ talis, ut sit $DE = \sqrt{DK \times DH}$; & $DF = \sqrt{DM \times DI}$; ac ità perpetuò; erit spatium ADE quadrati ex DK subquadruplum.

Nam est MP. PK :: DK.DH :: DKq.DK × DH :: DKq. DEq. item DP.PM :: DE.EX; hoc est DK.PM :: DE. EX. ergo MP × DK.PK × PM :: DKq × DE. DEq × EX. hoc est DK PK :: DKq. DE×EX. vel DKq. DK×PK :: DKq. DE × EX. unde DK × PK = DE × EX. Simili ratione DM × MR (vel DP × PQ) = DF × FY. Verùm omnia DK × PK, DP × PQ, &c. æquantur semissi quadrati ex DK; & omnia DE × EX, DF × FY, &c æquantur *duplo spatio* EDA; unde manifeste consequitur Propositum.

Fig. 129. XXIV. Sit curva quæpiam DOK, in qua punctum D; cuique subtendatur recta DK; sit item curva DZI talis, ut sumpto in curva DOK puncto quopiam M, connexâque DM; & ductâ DS ad DM perpendiculari, & MS curvam DOK tangente; sumptâ demum DP = DM, & ductâ PZ ad DK perpendiculari, sit PZ = DS; erit *spatium* DKI æquale *duplo spatio* DKOD.

Nam recta KP concipiatur indefinitè parva; & DT ipsi DK perpendicularis sit, & KT curvam DOK tangat. Est itaque (ducto arcu MP) rursus KP. PM :: KD. DT :: KD. KI. unde KP × KI = PM × KD. Capiatur alia particula PQ, & centro D per Q ducatur arcus QN, quem secet subtensa DM in R; est ergò rursus MR. RN :: MD. DS; hoc est PQ. RN :: MD. PZ quare PQ × PZ = RN × MD; ac ità continuò deinceps. patet igitur omnia simul rectangula KP × KI, PQ × PZ, &c. æquari aggregato omnium PM × KD, RN × MD, &c. hoc est spatium DKI duplo spatio DKOD æquari.

Fig. 130. XXV. Iisdem quoad cætera positis atque paratis, ordinatæ PZ jam æquales concipiantur ipsis MS respectivis; & ad rectam assumptam X*k*, distantiasque X*k*, X*m*, X*n*, &c, æquales ipsis curvæ partibus DOK, DOM, DON, &c. applicentur rectæ *kd*, *md*, *nd*, &c. pares

pares ſubtenſis K D, M D, N D; &c. erit ſpatium X *k d* æquale ſpatio D K I.

Nam eſt K M . K P : : K T . K D; hoc eſt *k m* . K P : : K I . *k d*. unde *k m* × *k d* = K P × K I. Similique pacto, M N . M R : : M S . M D. ſeu *m n* . P Q : : P Z . *m d*. unde *m n* × *m d* = P Q × P Z. ac ità deinceps. unde conſtat Propoſitum.

XXVI. Sin porrò, perſiſtentibus reliquis, adſumptâ quâvis rectâ. *k g*, completóque rectangulo X *k g h*, curva D Z I talis intelligatur, ut ſit M D . M S : : *k g* . P Z; erit rectangulum X *k g h* æquale ſpatio D K I. Fig. 130.

Nam eſt rurſus K P . K M : : K D . K T : : *k g* . K I. adeóque K P × K I = (K M × *k g* =) *k m* × *k g*. Similitérque P Q × P Z = *m n* × *k g*. ac ità ſemper. Unde conſtat.

Hinc noto ſpatio D K I cognoſcetur quantitas curvæ D O K.

Hujuſmodi vero complura deprehendet quiſquis hanc *Mineram* penitiùs explorârit, ac excuſſerit. Faciat cui id vacat & adlubeſcit.

XXVII. Uſui fortè nonnunquam erit (mihi ſubinde fuit) & hoc, è præmiſſis deductum Theorema. Fig. 131.

Sit curva quæpiam V E H (cujus axis V D, baſis D H) quam tangat utcunque recta E T; & ducatur E A ad H D parallela. tum altera ſtatuatur curva G Z Z talis, ut à puncto E ductâ rectâ E Z ad V D parallelâ (quæ baſin D H in I, curvam G Z Z in Z ſecet) adſumptâq; quâpiam determinatâ R, ſit ſemper D A q. R q : : D T . I Z; erit D A . A E : : R q ſpat. D I Z G. (vel facto D A . R : : R . D P; ductâque P Q ad D H parallelâ, erit *Rectangulum* D P Q I par *ſpatio* D G Z I).

Etiam hoc adjiciatur *Theoremæ*; nonnunquam uſui futurum.

XXVIII. Sit curva quælibet A M B (cujus axis A D); ſit item linea K Z L proprietate talis, ut ſumpto in A M B quocunque puncto M, & ab eo ductis rectâ M P ad curvam A B perpendiculari (quæ axem A D ſecet in P) & rectâ M G ad A D perpendiculari (quæ curvam K Z L ſecet in Z) ſit conſtantèr G M . M P : : arc A M . G Z; erit *ſpatium* A D K L æquale *ſemiſſi quadrati* ex arcu A M. Fig. 132.

Hæc inquam, è præcedentibus haud magnâ operâ colligantur, id verò ſufficiat admonitum; etenim hic animus eſt paulo ſubſiſtere.

APPEN-

APPENDICULA.

I. Cum pridem ante plures annos illustris Viri, *Christiani Hugenii*, *Cyclometrica* lustrarem, ac in eo versatus adverterem ad id negotii duas præsertim ab ipso methodos adhiberi; quarum una *Circuli segmentum* duobus parabolicis (uni inscripto, alteri adscripto) medium esse monstrans, illius inde magnitudini limites præscribit; altera *Parabolici segmenti*, & *Parallelogrammi* æquè altorum centris gravitatum medium interjacere centrum gravitatis circularis segmenti ostendens, alteros exindè limites, adsignat; incidit mihi cogitatio posse loco parabolæ in prima methodo, nec non vice Parallelogrammi in secunda, paraboliformium aliquam circulari segmento circumscriptibilem usurpari, sic ut res aliquanto propiùs attingatur; id mox verum esse re perpensâ comperi; quin& præterea notavi facilè suppares methodos *Hyperbolici segmenti dimensioni* accommodari. Quorum demonstratio (præ aliis fortasse, quæ excogitari possent) brevis & clara cùm è suprà positis consequatur aut pendeat, eam (alioquin opinor haud injucundam) hìc visum est apponere.

Fig. 133. II. Adsumimus autem hæc pervulgata; quorúmque demonstrationes è præmonstratis haud difficilè variis modis colligantur; si *paraboliformis* BAE (cujus *Axis* AD, *Basis* vel ordinata BDE, *Tangens* BT; *Gravitatis centrum* K) exponens sit $\frac{n}{m}$; erit *Area* BAE $= \frac{m}{n+m}$ AD × BE; & TD $= \frac{m}{n}$ AD, & KD $= \frac{m}{n+2m}$ AD.

Fig. 134. III. Sint duæ quævis curvæ AEB, AFB (quarum communis axis AD, ordinata DB) ità se habentes, ut ductâ quâcunque rectâ EFG ad BD parallelâ, quæ lineas expositas punctis E, F, G secet, positóque quòd rectæ ES, FT tangant curvas, (illa curvam AEB, hæc ipsam

ipsam A F B) sit perpetuo T G major quàm S G; dico nullam curvæ A F B partem intra ipsam A E B cadere.

Si fieri potest, cadat pars N F M; ità scilicet ut curva A F B curvam A E B intersecet punctis M, N; his autem interjecta concipiatur indeterminatè ordinata E F G; sint verò lineæ L X K, R Y Q tales, ut ductis rectis E O, F P ad ipsas E S, F T perpendicularibus, protractâque rectâ E G, ut hæc dictas lineas L K, Q R secet punctis X, Y; sit G X = G O, & G Y = G P. Jam ex ostensis patet esse *spatium*

$$\text{IHKL} = \frac{\text{HMq} - \text{INq}}{2} = \text{spat.IHQR};$$ adeóq; spat. IHKL, IHQR æquari. Verùm ob GE. GO (GX) : : SG; GE. ⊐ SG. GF ⊐ TG. GF : : GF. GP (GY) ⊐ GE. GY; est G X ⊏ GY; adeóque (cùm hoc ubique similiter contingat) spatium I H K L majus spatio IHQR; quod repugnat ostenso. itaque liquet Propositum.

Hinc tota AFB extra totam AEB jacet, nec illa hanc usquam intersecat.

IV. Sit curva quæpiam B A E, cujus axis A D, & ad hunc ordinata basis A D E; segmenti verò B A E centrum gravitatis sit punctum H, per quod ducta sit recta R S ad B E parallela. Porrò per puncta R, S transeat altera curva (vel linea quævis) M R A S N, habens itidem axin A D, ac ità priorem curvam B A E secans, ut ejusce pars superior R K A P S intra curvam B A E cadat, inferiores vero reliquæ partes R M, S N extra eandem; erit segmenti M R A S N centrum gravitatis infra punctum H, versus basin M N. Fig. 135.

Nam è segmento R I A O S ablatum R I A K + A O S P residuum B R K A P S E deprimet versus basin B E. puta ut jam sit hujus residui *Centrum gravitatis* ad X; tunc adjunctum B R M + E S N adhuc totum M R K A P S N magis deprimet; adeóque centrum ejus infra X consistet, velut ad Y. itaque constat Propositum.

V. *Circulum* A F B, cujus *Centrum* C, tangant duæ rectæ BT, E S *Diametro* C A occurrentes punctis T, S; & ad C A perpendiculares sint rectæ B D, E P; sit autem A D major quàm A P; erit T D. AD ⊏ S P. A P. Fig. 136.

Nam est C T. C A : : C A. C D. Ideoque CT – CA. CA – CD : : CT. CA, hoc est TA. AD : : CT. CA. Simili ratione constabit esse S A. AP : : C S. C A. Est autem C T. C A ⊏ CS. C A. quare T A. A D ⊏ S A. A P. vel componendo T D. A D ⊏ S P. A P.

VI. *Hyper-*

VI. *Hyperbolam* A E B, cujus *Centrum* C, tangant duæ rectæ
Fig. 137. B T, E S, & reliqua ponantur ut in proximè præcedente; erit T D : A D $\sqsupset$ S P . A P.

Nam est C A . C D :: C T . C A . unde C A — C T . C D — C A :: C T . C A; hoc est T A . A D :: C T . C A. suppare discursu, est S A . A P :: C S . C A. Verùm est C T . C A $\sqsupset$ C S . C A. quare T A . A D $\sqsupset$ S A . A P; seu componendo T D . A D $\sqsupset$ S P . A P.

VII. *Circuli* A E B (cujus *Centrum* C) & *paraboliformis* A F B communes sint axis A D, & basis B D; sit autem *paraboliformis* exponens $\frac{n}{m}$; & A D $= \frac{m - 2n}{m - n}$ C A (vel $m - n \,.\, m - 2n ::$ C A . A D) *circulum* verò tangat recta B T; hæc quoque *paraboliformem* A F B continget.

Fig. 138. Nam quia B T *circulum* tangit, est C T . C A :: C A . C D; unde T A . A D :: C A . C D componendóque T D . A D :: C A + C D . C D Item, quoniam est (ex hypothesi) C A . A D :: $m - n \,.\, m - 2n$; erit per rationis conversionem C A . C D :: $m - n \,.\, n$. & componendo C A + C D . C D :: $m \,.\, n$. hoc est T D . A D :: $m \,.\, n$. unde (*a*) palàm fit,
(*a*) 2 hujus ap. quòd B T *paraboliformem* A F B tangit.

VIII. Subnotetur, quòd inversè, datâ ratione ipsius A D ad C A designabitur hinc *paraboliformis*, quæ *Circulum* A E B ad B continget. Nempe, si A D $= \frac{s}{t}$, erit $\frac{t - s}{2t - s}$ dictæ *paraboliformis* exponens. Nam posito fore $\frac{t - s}{2t - s} = \frac{n}{m}$; erit ideò (juxta crucem multiplicando) $mt - ms = 2tn - sn$; & transponendo $mt - 2nt = ms - ns$. ac ideò (æqualitatem ad analogismum redigendo) $m - n \,.\, m - 2n :: t \,.\, s ::$ C A . A D. itaque constat ex antecedente Propositum.

IX. Manente quoad cætera septimæ hypothesi, *paraboliformis* A F B extra *circulum* A E B tota cadet.

Fig. 139. Nam utcunque ducatur recta G E F ad D B parallela; quæ secet circulum ad E, paraboliformem in F; ductæque concipiantur rectæ E S *circulum*, & recta F R *paraboliformem* contingentes; Estque R G.

R G . A G : : (*a*) $m . n$: : T D . A D (*b*) $\sqsubset$ S G . A G. quare R G $\sqsubset$ S G. unde (*c*) patet tota A F B extra circulum A E B jacere. (*a*) 2. *hujus. app.* (*b*) 5. *hujus ap.* (*c*) 3. *hujus ap.*

X. Reliquis itidem ſtantibus, ſi ad baſin G E (utcunque parallelam ipſi DB) & axem AD çonſtituta intelligatur *paraboliformis* ejuſdem cum ipſa AFB generis (nempe cujus etiam exponens $\frac{n}{m}$) illa ad partes A ſupra G E, extra *circulum* tota jacebit. Fig. 139.

Nam in arcu A E accepto quocunque puncto M, ductâque M P ad E G parallelâ, & M V circulum tangente ; eſt V P . A P $\sqsupset$ S G . A G $\sqsupset$ R G . A G : : $m . n$; (*a*) itaque rurſus liquet Propoſitum. (*a*) 3. *hujus ap.*

XI. Conſectatur etiam dictam (ipſi A F B coordinatam & ad baſin G E conſtitutam) *paraboliformem* infra G E ad D B protractam, eatenus intra *Circulum* totam cadere, Fig. 139.

Quòd intra *Circulum* ſtatim infra E G cadet ex eo patet, quòd ipſam tangens R E circulum ſecat (quia nempe S E circulum tangit) . quòd alibi *Circulo* non occurret hinc patet ; quoniam poſito quòd occurrat uſpiam ad N, (*a*) tota ſupra N extra circulum caderet, contra quam modò dictum ac oſtenſum eſt. (*a*) 3. *hujus ap.*

XII. Porrò, *Hyperbole* A E B (cujus centrum C) & *paraboliformis* A F B, cujus exponens $\frac{n}{m}$, communes ſint axis AD, baſis DB ; ſit autem A D $= \frac{2n - m}{m - n}$ CA ; & B T *hyperbolam* tangat ; hæc quoque *paraboliformem* AFB continget. Fig. 140.

Nam eſt CD.CA : : CA.CT. ac indè AD.TA : : CD.CA ; inverſéq; componendo T D . A D : : C A + C D . C D. Verùm ex hypotheſi, eſt $m - n . 2n - m$: : C A . C D ; adeoque inversè componendo C A . C D : : $m - n . n$; & rurſus componendo C A + C D . C D : : $m . n$. hoc eſt T D . A D : : $m . n$. unde B T *hyperboliformem* contingit.

XIII. Hinc rurſu datâ ratione ipſius A D ad C A, *paraboliformis* ad punctum B *hyperbolam* contingens deſignabitur. nempe ſit A D $= \frac{s}{t}$ C A ; erit $\frac{n}{m} = \frac{t + s}{2t + s}$. Nam hoc ſuppoſito erit (*componendo*

 mul-

multiplicando) $2tn + sn = mt + ms$. vel transponendo $2nt - mt = ms - ns$. unde $m - n . 2n - m :: t . s :: CA . AD$. ergò patet ex antecedente.

XIV. Stante duodecimæ hypothesi, *paraboliformis* A F B intra hyperbolam A E B tota cadet.

Fig. 141. Nam utcunque ducatur E F G ad B D parallela; & recta E R *hyperbolam*, recta F S *paraboliformem* tangant. Estque S G . A G :: (*a*) $m . n$ :: T D . A D (*b*) ⊐ R G . A G. unde R G ⊏ S G. (*c*) unde curva A E B extra curvam A F B tota cadet.

(*a*) 2 *hujus ap.* (*b*) 5. *hujus ap.* (*c*) 3. *hujus ap.*

XV. Etiam, si reliquis perstantibus, ad basin G E, axin A G constitutam imagineris ejusdem ordinis *paraboliformem*; hæc ad partes ipsâ G E superiores intra *hyperbolam* tota cadet.

Fig. 141. Nam si in *curva hyperbolica* A E sumatur ubicunque punctum M, & ordinetur M P, ducatúrque hyperbolam tangens M V; erit V P . A P ⊏ $m . n$. adeoque rursus è tertia liquet Propositum.

XVI. Quinetiam si hæc altera coordinata *paraboliformis*, ad basin E G constituta, ad D B protracta concipiatur, ejus ipsis E G, B D intercepta pars extra *hyperbolam* tota cadet.

Fig. 141. Nam quòd extra *hyperbolam* infra E G cadit, exinde patet, quòd ipsa cum ipsius tangente recta E S angulum efficit minorem eo, quem eadem recta E S efficit cum recta R E hyperbolam tangente. quòd autem eadem alibi, velut ad N, *hyperbolæ* non occurrit, patet; quoniam hoc posito, (*a*) ipsa intra *hyperbolam* A N tota consisteret, contra quàm mox ostensum est.

(*a*) 3. *hujus ap.*

XVII. Habeant *Circulus* A E B, & *Parabola* A F B communem axem A D, & basin D B; *parabola* ad partes supra B D intra *Circulum*; at infra B D extra *circulum* cadet.

Fig. 142. Sit enim *Circuli Diameter* A Z, & ei æqualis A H ad B D parallela, & connectatur Z H; & huic B D producta ad I; ergo D I est *Parameter parabolæ* A F B. quòd si supra B D utcunque ducatur recta E F G K ad B D parallela circulum secans in E, parabolam in F, rectas A Z, H Z, in G, & K, patet esse G E q = A G × G K ⊏ A G × D I = G F q. unde G E ⊏ G F. Item, si infra B D utcunque ducatur recta M N O L ad B D parallela *parabolam* secans in M, *circulum* in N, rectas A Z, H Z in O, & L, itidem patet esse M O q = A O × D I ⊏ A O × O L = N O q. & ideò M O ⊏ N O.

$\sqsubset$ NO. quare liquent ea, quæ Proposita sunt.

Si *Circulo* substituatur *Ellipsis*, eadem conclusio valet idem discursus probat; positâ AH *Ellipsis parametro*.

XVIII Habeant *hyperbola* AEB (cujus axis AZ, parameter AH) & *parabola* AFB axin eundem AD, & basin DB, *parabola* supra DB tota extra *hyperbolam* cadet, extra vero, si infra DB protrahatur. Fig. 143.

Nam connexæ ZH occurrat BD in I; ergò DI est *parabolæ parameter*. Quòd si supra BD utcunque ducatur recta FEGK ad BD parallela, secans hyperbolam in E, parabolam in F, rectas AD, ZH punctis G, K, erit FGq = AG × DI $\sqsubset$ AG × GK = EGq. quare FG $\sqsubset$ EG. Quòd si infra BD, utcunque ducatur recta MNOL secans hyperbolam in N, parabolam in M, rectas AD, ZH in O, & L, erit NOq = AO × OL $\sqsubset$ AO × DI = MOq. & indè NO $\sqsubset$ MO. unde constant ea quæ proposita sunt.

XIX. E dictis eliciuntur hæ *ad Circuli dimensionem pertinentes regulæ*. Sit BAE circuli portio, cujus axis AD, basis BE; sitque C centrum circuli, & EH sinus rectus arcûs BAE; item, sit AD = Fig. 144.

$\frac{s}{t}$CA; erit 1. $\frac{2t-s}{3t-2s}$AD × BE $\sqsubset$ port. BAE.

2. EH + $\frac{4t-2s}{3t-2s}$BH $\sqsubset$ arc. BAE.

3. $\frac{2}{3}$AD × BE $\sqsupset$ port. BAE.

4. EH + $\frac{4}{3}$BH $\sqsupset$ arc. BAE.

XX. Itidem hæ deducuntur ad *hyperbolæ dimensionem spectantes regulæ*. Sit *hyperbolæ* (cujus centrum C) segmentum ADB, habens Fig. 145.

axin AD = $\frac{s}{t}$CA; & basin DB;

erit 1. $\frac{2t+s}{3t+2s}$AD × DB $\sqsupset$ segm. ADB. &

2. $\frac{2}{3}$AD × DB $\sqsubset$ segm. ADB.

XXI. Porrò, sit *circuli* (cujus centrum C) segmentum B A E, cujus axis A D, & *gravitatis centrum* K; ponatur autem $AD = \frac{s}{t} CA$, & $HD = \frac{2t-s}{5t-3s} AD$; erit H D major ipsâ K D.

Fig. 146. Nam per H ducatur recta O P ad B E parallela; éstque punctum
(a) 2.hujus ap. H (a) centrum *gravitatis paraboliformis*, (puta A F B) ad basin B E constitutæ, cujus exponens $\frac{t-s}{2t-s}$ & (b) quæ proinde circulum AEB
(b) 8.hujus ap.
tangit; (nam si $\frac{t-s}{2t-s} = \frac{n}{m}$; erit $\frac{2t-s}{5t-3s} = \frac{m}{n+2m}$) & proinde H (a) erit centrum gravitatis *paraboliformis* isti coordinatæ per O, P transeuntis, & ad basin B E pertingentis. Hæc autem supra O
(c) 10.hujus ap P (c) extra *circulum* cadit, & infra O P (d) intra ipsum; (e) adeóque
(d) 11hujus ap punctum H supra K situm est.
(e) 4.hujus ap.

XXII. Sin punctum L sit *centrum gravitatis parabolæ*, erit L infra
Fig. 146. K situm; adeóque $KD \sqsubset \frac{2}{5} AD$. Patet ex 4, & 17 hujus appendiculæ.

Fig. 147. XXIII. Sit *Hyperbola* (cujus centrum C) *segmentum* B A E, cujus axis A D, basis B E; gravitatis centrum K; ponatur autem $AD = \frac{s}{t} CA$, & $HD = \frac{2t+s}{5t+3s} AD$; erit H D minor ipsâ K D.
(a) 2.hujus.ap. Nam per H ducatur recta O P ad B E parallela (a). Estque punctum H centrum gr. *paraboliformis*, puta A F B, ad basin D B. constitutæ,
(b) 13.hujus ap cujus exponens $\frac{t+s}{2t+s}$; (b) quæ & *Hyperbolam* ad B contingit (nam si $\frac{t+s}{2t+s} = \frac{n}{m}$; erit $\frac{2t+s}{5t+3s} = \frac{m}{n+2m}$) (a) quare H erit centrum gravitatis paraboliformis isti coordinatæ per O,P ductæ,& ad BE
(c) 15.hujus ap. pertingentis. hæc autem supra O P (c) intra hyperbolam cadit;
(d) 16 hujus ap & infra O P (d) extra illam; (e) inde punctum K supra H
(e) 4.hujus ap. existit.

XXIV. Parabolæ centrum gr. (puta L) supra K existit, adeóque $KD \sqsupset \frac{2}{5} AD$. Patet ex 4, & 18 hujus appendiculæ.

XXV. Nè

XXV. Nè speculatio præsens, *ob hujusmodi complures methodos Cyclometricas indies promulgatas*, aspernanda videatur, adjungemus consectarium unum vel alterum, quibus fortè solis hæc paucula meruerant impendi; à quibus nempe *Maxima*, *Minimaque* sui generis innumera determinantur. Fig. 148.

Sit *Semicirculus* ABZ, cujus centrum C; sitque *segmentum* ADB; & huic adscripta *paraboliformis* AFB, cujus exponens $\frac{n}{m}$; sit item $AD = \frac{m - 2n}{m - n} CA$; *paraboliformis* autem *parameter* (hoc est recta, cujus aliqua potestas in potestatem segmenti axis, seu AD, ducta conficit *potestatem* ordinatæ, ceu DB) nominetur p; erit p in suo genere *maximum*.

Nam utcunque ducatur GE ad DB parallela, & ad GE posita concipiatur *paraboliformis*, ipsi AFB coordinata, cujus *parameter* dicatur q. quum ergò *paraboliformis* AFB *circulum* extrorsum contingat, erit $GF \sqsubset GE$; adeóque $GF^m \sqsubset GE^m$; hoc est $p^{m-n} \times AG^n \sqsubset q^{m-n} \times AG^n$; quare $p \sqsubset q$.

Notandum est esse $p^{2m-2n} = ZD^m \times AD^{m-2n}$. & $q^{2m-2n} = ZG^m \times AG^{m-2n}$. unde $ZD^m \times AD^{m-2n} \sqsubset ZG^m \times AG^{m-2n}$. quare $ZD^m \times AD^{m-2n}$ est maximum.

Exemp. 1. Sit $n = 1$, & $m = 3$. erit ideò $p^4 = ZD^2 \times AD = ZDq \times BDq$; vel $p^2 = ZD \times BD$. Item $AD = \frac{1}{2} CA$.

2. Sit $n = 3$, & $m = 10$. erit $p^{14} = ZD^{10} \times AD^4$. vel $p^2 = ZD^{\frac{10}{7}} \times AD^{\frac{4}{7}} = ZD^{\frac{3}{7}} \times BD^{\frac{4}{7}}$. & $AD = \frac{4}{7} CA$.

XXVI Sit item *hyperbola* (æquilatera) cujus centrum C, axis ZA; & huic inscripta *paraboliformis* AFB cujus exponens $\frac{n}{m}$ *parameter* p; sitque $AD = \frac{2n - m}{m - n} CA$; erit p sui generis maximum. Fig. 149.

Nam utcunque ducatur EG ad BD parallela; & ad EG constituta intelligatur *paraboliformis*, ipsi AFB coordinata, cujus *parameter* q. quum ergo *paraboliformis* AFB *hyperbolam* introrsum contingat, erit $GF^m \sqsupset GE^m$; hoc est $p^{m-n} \times AG^n \sqsupset q^{m-n} \times AG^n$; quare $p \sqsupset q$.

Notandum

Notandum est esse $p^{\frac{2m-2n}{}} = \frac{ZD^{\frac{m}{}}}{AD^{\frac{2n-m}{}}}$; & $q^{\frac{2m-2n}{}} = \frac{ZG^{\frac{m}{}}}{AG^{\frac{2n-m}{}}}$, unde erit $\frac{ZD^{\frac{m}{}}}{AD^{\frac{2n-m}{}}} \sqsupset \frac{ZG^{\frac{m}{}}}{AG^{\frac{2n-m}{}}}$, quare $\frac{ZD^{\frac{m}{}}}{AD^{\frac{2n-m}{}}}$ est minimum.

Fig. 149.

Exemp. 1. Sit $n = 2$; & $m = 3$; erit $p^2 = \frac{ZD^3}{AD} = \frac{BD^5}{AD^4}$. & $p = \frac{BD^3}{ADq} = \frac{ZDq}{BD}$. Item $AD = CA$.

2. Sit $n = 3$; & $m = 4$; erit $p^2 = \frac{ZD^4}{AD^2}$ vel $p = \frac{ZD^2}{AD} = \frac{BD^4}{AD^3} = \frac{ZD^3}{BD^2}$. Item $AD = 2\,CA$.

3. Sit $n = 5$, & $m = 8$; erit $p^6 = \frac{ZD^8}{AD^2}$. vel $p^3 = \frac{ZD^4}{AD} = \frac{BD^8}{AD^5} = \frac{ZD^5}{BD^2}$. Item $AD = \frac{2}{3}\,CA$.

Quoniam in his *Cyclometriam* attigi, quid si obiter eò spectantia *Theoremata*, quæ ad manum, paucula subjunxero? præsternatur autem autem hoc καθολικὸν:

Fig. 150.

Sit curva quæpiam AGB, cujus axis AD, & ad hunc ordinatæ rectæ BD, GE; Habebit curva AB ad curvam AG majorem rationem quam recta BD ad rectam GE.

Nam ducatur recta GH ad AD parallela: secentúrque recta BH punctis Y, & recta GE punctis Z in particulas indefinitè multas; pérque puncta Y, Z ducantur rectæ YM, YN, ZO, ZP ad AD parallelæ: curvam intersecantes punctis M, N, O, P; per quæ ducantur rectæ MR, NS, OT, PV ad BD parallelæ. Estque angulus BMY (ut è superius ostensis liquet) minor angulo NGS, unde MB.BY $\sqsubset$ GN.NS. Similique de causa est NM. MR $\sqsubset$ GN.NS.* quare conjunctè est BM + MN + NG.BY + MR + NS $\sqsubset$ GN.NS; hoc est arc. GB.BH $\sqsubset$ GN.NS. rursus (è discursu consimili) ratio GN ad NS major est singulis rationibus OG ad GZ, OP ad PT, & AP ad PV; idcircoq; junctè est GN.NS $\sqsubset$ arc. AG.GE. quapropter erit GB.BH $\sqsubset$ AG.GE. permutandòque GB.AG $\sqsubset$ BH.GE. quare componendo est AB.AG $\sqsubset$ BD.GE.

* Vid. *Append.* Lect. XII.

XXVIII.

XXVIII. Sit *Circulus* AMB, cujus *Radius* C A, & ad hunc perpendicularis recta D B E ; sit item curva A N E talis, ut ductâ utcunque rectâ P M N ad D E parallelâ (quæ circulum secet in M, dictam curvam in N) sit recta P N æqualis *Arcui* A M ; sit demum *axe* A D, *base* D E descripta *Parabola* A O E, hæc extra curvam A N E tota cadet. Fig. 151

Nam secet recta P N parabolam in O ; & connectantur subtensæ A B, A M ; estque D E . P N :: arc. A B . arc. A M $\sqsubset$ A B . A M :: D E . P O , quare P N $\sqsupset$ P O ; unde liquet Propositum.

XXIX. Exhinc (& è vulgò notis *spatiorum* A D B, A D E *dimensionibus*) facilè colligitur hæc regula : $\frac{3 CA \times DB}{2 CA + CD} \sqsupset$ arc. A B. Fig. 152.

Porrò si ponatur arc. A B = 30 grad. sitque 2 C A = 113 ; juxta regulam istam computando, proveniet *tota circumferentia* major quàm 355, minus fractione unitatis.

XXX. Hinc etiam *dato arcu* A B, nominatísque $AB = p$; $CA = r$; & $DB = e$, ad inveniendum *sinum rectum* D B adhibebitur hæc æquatio ; $\frac{3rrpp}{9rr + pp} = \frac{12rrp}{9rr + pp} e - ee$. vel ponendo $k = \frac{3rrp}{9rr + pp}$; erit $kp = 4ke - ee$. vel $2k - \sqrt{4kk - kp} = e$.

XXXI. Sit A M B *Circulus*, cujus Radius C A, & huic perpendicularis recta D B E ; sit item curva A N E pars *Cycloidis* ad *Circulum* A M B pertinentis ; demum ad axem A D, basin D E statuatur *Parabola* A O E ; hæc intra *Cycloidem* tota cadet. Fig. 153.

Etenim utcunque ducatur recta P M O N ad D E parallela, lineas expositas secans, ut cernis ; connectantúrque *subtensæ* A B, A M ; estque D E . P O :: A B . A M :: curv. A E . A N $\sqsubset$ D E . P N ; adeoque P O $\sqsupset$ P N. unde constat Propositum.

XXXII. Exhinc, & è *notis segmentorum circularis atque Cycloidalis dimensionibus*, hæc elicitur *Regula* $\frac{2 CA \times DB + CD \times DB}{CA + 2 CD} \sqsubset$ arc. A B.

Porrò si fuerit arc. AB = 30 grad. & ponatur 2 C A = 113 ; è regula hac consectatur fore *totam circumferentiam* minorem quam 355, plus fractione.

Vides igitur ut è propositis duabus regulis statim emergit *Diametri* ad *Circumferentiam Proportio Metiana*.

XXXIII. Quoniam exorbitanti se obviam dedit *Cyclois* hoc adnotabo *Theorema*, nescio an uspiam ab illis, qui de *Cycloide* tam fusè scripserunt, animadversum : Completo *Rectangulo* ADEG, *spatium* AEG

AEG æquatur *Circulari segmento* ADB demonstrationem, ne longiùs evager, obmittam.

Fig. 154. XXXIV. Sint duo *circuli* AIMG, AKNH sese contingentes ad A; communique diametro A H G, utcunque perpendicularis ducatur recta D N M: habebit *segmentum* A I M D ad *segmentum* AKND minorem rationem, quam recta DM ad rectam D N.

Nam sit A R ad AG perpendicularis, ac ipsi A H æqualis; & connectatur H R, cui occurrat recta M D in X; ducatúrque recta G X S; tum ad axem A G *parametrum* A S per N descripta concipiatur *Ellipsis* A L N G; hæc (uti satis manifestum) intra arcum A K N tota cadet. Est autem segm. A I M D. segm. A L N D:: D M. D N. ergo segm. A I M D. segm. A K N D ⌐ DM. DN.

Fig. +154. XXXV. Sit Ellipsis YFZT, cujus axes conjugati YZ, FT; sit item recta DC axi majori Y Z parallela; & per D, F, C transeat circulus DFCV centrum habens K, in ellipsis axe minore F T situm; dico circuli partem DOFPC intra ellipsis partem DMFNC jacere.

Nam sit FI ad FV perpendicularis, & in hac sumatur FS = FV; & connectatur V S, cui DC producta occurrat in X; & connexa T X ipsi FI occurrat in R. & cùm sit G D q = F G × G V = F C × GX; liquet ipsam FR esse ellipsis, axi F T congruam, parametrum; unde constat Propositum.

Fig. 155. XXXVI. Sit circuli, cujus centrum L, segmentum DEC, & sumpto in ejus axe GE puncto quopiam F, sit curva DMFC talis, ut ductâ utcunque rectâ RMS ad G E parallelâ, sit R S. R M:: G E. G F; erit DMFC ellipsis, hoc modo determinata: Fiat E G. F G:: G L. G H; & per H erigatur YHZ ad DC parallela, sitque HY par ipsi LE; erunt HY, HF ellipsis semiaxes.

Demonstratum habetur a *Greg. à S. Vincentio*, L. IV. Prop. 154.

Corol. Hinc segm. DEC. DMFC:: EG. FG.

XXXVII. Sint duæ circulorum portiones DEC, DOFC quarum communis subtensa DC, & axis GFE; portio major DEC ad portionem DOFC majorem rationem habet eâ, quam habet axis G E ad axem G F.

Nam sint L circuli DSEC, & K circuli DOFC centra; & fiat EG. FG:: GL. GH; & fiat YHZ ad HF perpendicularis, & sit HY æqualis ipsi LE; tum semiaxibus HY, HF descripta concipiatur ellipsis YDMFZ; è mox prædictis liquet ellipsin DMFC circulo DOFC circumduci. Est autem circulare segmentum DEC ad segmentum ellipticum DMFC, ut GE ad GF; quare segm. DEC ad segm. circulare DOFC. rationem habet majorem, quàm GE ad GF: Quod. E. D.

Lect. XII.

IN ſuſcepto negotio progredimur; quod ut (quatenus licet) decurtemus, verbiſque parcamus; obſervetur, in ſequentibus ubique *lineam* A B *curvam* eſſe (quales tractamus) quampiam; cujus *Axis* AD; huic applicatas omnes rectas B D, C A, M F, N G perpendiculares; & M E, N S, C B parallelas eſſe; *punctum* M liberè ſumi; *arcum* M N indefinitè parvum eſſe; rectam $\alpha\beta$ curvæ V B, $\alpha\mu$ curvæ A M, $\mu\nu$ *arcui* M N æquales eſſe; ad rectam $\alpha\beta$ applicatas ei perpendiculares eſſe. His præſtratis, *Præparatio Communis.*

I. Sit M P curvæ A B perpendicularis; & lineæ K Z L, $\alpha\phi\delta$ tales, ut F Z ipſi M P, & $\mu\phi$ ipſi M F æquentur; erit *ſpatium* $\alpha\beta\delta$ ipſi A D L K æquale. Fig. 156, 157.

Nam *Triangula* M R N, P F M ſimilia ſunt, adeoque M N . N R :: P M . M F. unde M N × M F = N R × P M, hoc eſt (ſubſtitutis æqualibus) $\mu\nu \times \mu\phi$ = F G × F Z; ſeu rectang. $\mu\theta$ = rectang. FH; ſpatium verò $\alpha\beta\delta$ minimè differt ab indefinitè multis rectangulis, qualia $\mu\theta$; & ſpatium A D L K totidem rectangulis, qualia F H, æquivalet. unde liquet Propoſitum.

II. Hinc, ſi curva A M B circa axem A D rotetur, habebit ſe *producta ſuperficies* ad *ſpatium* A D L K, ut *Circumferentia circuli ad radium*; unde noto ſpatio A D L K cognoſcetur dicta *ſuperficies*. Conſequentiæ rationem jam anteà pridem aſſignavimus. Fig. 156.

III. Exhinc *Sphæræ*, *Sphæroidis* utriuſque, *Conoidúmque ſuperficies dimenſionem* accipiunt; nam ſi A D ſit conicæ ſectionis, à qua iſtæ figuræ oriuntur, axis; linea K Z L ſemper aliqua conicarum exiſtet, haud difficili negotio determinabilis. Hoc ſuggero tantùm, quoniam nunc evulgatum habetur.

P IV. Iiſdem

Fig. 156, 157. IV. Iisdem stantibus, sit curva AYI talis, ut ordinata FY sit inter congruas FM, FZ proportione media; erit *solidum* ex spatio $\alpha\delta\zeta$ circa axem $\alpha\zeta$ rotato factum æquale *solido*, quod à *spatio* ADI circa axem AD converso procreatur.

Nam est $MN . NR :: PM . MF :: PM \times MF . MFq :: FZ \times FM . MFq$. unde $MN \times MFq = NR \times FZ \times FM$; hoc est $\mu\nu \times \mu\varphi q = NR \times FYq$. Unde liquet Propositum.

Fig. 156, 157. V. Simili ratione colligetur, si FY ponatur inter FM, FZ *bimedia*, fore *summam cuborum* ex applicatis (quales $\mu\varphi$) à curva $\alpha\varphi\delta$ ad rectam $\alpha\zeta$, æqualem *summæ cuborum* ex explicatis à curva AYI ad rectam AD. parique modo se res habebit quoad cæteras *potestates*.

Fig. 156. VI. Porrò, stantibus reliquis, sit curva VXO talis, ut EX ipsi MP æquetur; & curva $\varpi\xi\psi$ talis, ut $\mu\xi$ æquetur ipsi PF; erit spatium $\alpha\varpi\psi\zeta$ æquale spatio DVOB.

Nam est $MN . MR :: MP . PF$; adeoque $MN \times PF = MR \times MP$. hoc est $\mu\nu \times \mu\xi = ES \times EX$. vel rectang. ST = rectang. $\mu\sigma$. Unde liquet Propositum.

Fig. 156. VII. Subnotetur hoc: Si curva AB sit *Parabola*, cujus *Axis* AD, *parameter* R; erit curva VXO *hyperbola*, cujus *centrum* D, *Axis* DV, cujusque *parameter* axi R æquatur (scilicet ob $EXq = (PMq = PFq + FMq = \frac{Rq}{4} + FMq = \frac{Rq}{4} + DEq =) DVq + DEq$). item *spatium* $\alpha\zeta\psi\varpi$ erit *Rectangulum*; quoniam singulæ applicatæ $\mu\xi$ ipsi $\frac{R}{2}$ æquantur. Constat itaque dato *spatio hyperbolico* DVOB curvam AMB dari; & vicissim. Hoc obiter.

Fig. 157. VIII. Adnotari posset etiam omnia simul quadrata ex applicatis ad rectam $\alpha\zeta$ à curva $\varpi\xi\psi$ æquari rectangulis omnibus ex PF, EX ad rectam DB applicatis (seu computatis); cubos ex $\mu\xi$ æquari ipsis $PFq \times EX$; ac ita porro.

Fig. 157. IX. Adjungatur etiam (productâ PMQ) si ponatur FZ æqualis ipsi PQ, & $\mu\nu$ ipsi AQ; *spatium* $\alpha\zeta\delta$ *spatio* ADLK æquari.

Nam

Nam ob M N . N R :: P M . M F :: P Q . Q A ; erit M N × Q A = N R × Q A ; hoc est rectang. $\mu\theta$ = rectang. F H.

X. Porrò, curvam A B tangat recta M T, sintque curvæ D X O, $\alpha\varphi\delta$ tales, ut E X æquetur ipsi M T, & $\mu\varphi$ ipsi M F ; erit spatium $\alpha\zeta\delta$ æquale *spatio* D X O B. Fig. 158.

Nam M N . M R :: M T . M F . quare M N × M F = M R × M T ; 159.
hoc est $\mu\nu \times \mu\varphi$ = E S × E X ; unde patet.

XI. Hinc rursus, *superficies solidi ex spatii* A B D circa axem A D conversione progeniti ad *spatium* D X O B se habet, ut *Circuli Circumf.* ad *radium* ; hoc igitur noto simul illa innotescet. unde rursus Fig. 158.
Sphæroidum, Conoidumque superficies dimetiri licebit.

XII. Si lineâ D Y I talis fuerit, ut sit E Y = $\sqrt{}$ E X × M F ; erit *solidum* ex *spatio* $\alpha\zeta\delta$ circa axem $\alpha\zeta$ rotato factum æquale *solido, quod ex spatio* D B I circa axem D B rotato progignitur.

Etenim est M N . M R :: M T × M F . M F q :: E X × M F . MFq :: E Y q . M F q . quare M N × M F q = M R × E Y q . hoc est $\mu\nu$ Fig. 158.
× $\mu\varphi$q = E S × E Y q. 159.

XIII. Simili ratione *Cuborum* (*aliarumque potestatum*) ex ordinatis $\mu\varphi$ *summas* cum *spatiis* ad rectam D B computatis licebit conferre.

XIV. Sint prætereà lineæ A Z K, $\alpha\xi\psi$ tales, ut F Z ipsi M T, & $\mu\xi$ ipsi T F æquentur ; *spatium* $\alpha\zeta\psi$ æquabitur *spatio* A D K.

Etenim M N . N R :: M T . T F ; hoc est $\mu\nu$. F G :: F Z . $\mu\xi$. Fig. 158.
quare $\mu\nu \times \mu\xi$ = F G × F Z. 159.

XV. Etiam *summa quadratorum* ex applicatis $\mu\xi$ æquatur *summæ Rectangulorum* ex T F, F Z ; & *summa Cuborum* ex $\mu\xi$ æquantur ipsis T F q × F Z (ad rectam scilicet A D computationem exigendo) Fig. 158,
parique quoad cæteras potestates modò. 159.

XVI. Rursus ponatur recta Q M P curvæ A M B perpendicularis ; sitque recta $\zeta\delta$ æqualis ipsi B D, & compleatur *Rectangulum* $\alpha\zeta\delta\zeta$, tum curva KZL talis sit, ut F Z ipsi Q P æquetur ; erit *rectang.* $\alpha\zeta\delta\zeta$ Fig. 160,
æquale *spatio* A D L K. 161.

Nam est M N . N R :: (P M . M F ::) P Q . I F . quare M N × I F = N R × P Q ; hoc est $\mu\nu \times \mu\xi$ = F G × F Z . unde patet.

 Hinc

Hinc noto spatio AKLD cognoscetur curvæ AMB quantitas.

Fig. 160, 161. XVII. Item, posito rectam TMY contingere curvam AMB, factâque $\epsilon\gamma = BC$, completóque *Rectangulo* $\alpha\epsilon\gamma\psi$, sit curva OXX talis, ut FX ipsi TY æquetur; erit *spatium* (infinitè protensum) ADOXX æquale *Rectangulo* $\alpha\epsilon\gamma\psi$.

Nam MN . NR :: YT . DA; hoc est $\mu\nu$. FG :: FX . $\mu\theta$.& $\mu\nu \times \mu\theta = FG \times FX$. quare liquet.

Hinc rursus, explorato *spatio* ADOXX curva AMB innotescet,

Fig. 160, 161. XVIII. Quin adsumptâ quâpiam determinatâ R, & factâ rectâ $\epsilon\delta = R$; si curva OXX talis sit, ut MF . MP :: R . FX; erit *rectangulum* $\alpha\epsilon\delta\zeta$ æquale *spatio* ADOXX. ac inde comperto hoc spatio, curva prorsus innotescet.

Nam MN . NR :: MP . MF :: FX . R. adeóque $MR \times R = NR \times FX$; ceu $\mu\nu \times \mu\xi = FG \times FX$.

Complura talia possent adponi; sed vereor ut hæc nimis quam sufficere videantur.

XIX. Adnotetur saltem, hæc omnia æquè vera fore, nec absimiliter ostendi, posito curvæ AMB convexa rectam AD spectare.

XX. Ex ostensis autem *methodus* facilis emergit *curvas* (*δειγματικῶς*) *designandi*, quæ *dimensionem* admittunt qualem qualem; nimirum ità procedas.

Quamlibet (tibi quadantenùs notam) *aream trapeziam rectangulam*, duabus parallelis rectis AK, DL; rectâ AD; & lineâ quâcunque KL *comprehensam* accipe sis. ad istam verò sic referatur altera ADEC, ut ductâ quâcunque rectâ FH ad DL parallelâ (quæ secet lineas AD, CE, KL punctis F, G, H) adsumptâque rectâ determinatâ Z; sit *quadratum* ex FH æquale *quadratis* ex FG, & Z. quinetiam sit curva AIB talis, ut ad ipsam productâ rectâ GFI, sit *rectangulum* ex Z, & FI æquale *spatio* AFGC; erit *rectangulum* ex Z, & *curva* AB æquale *spatio* ADLK.

Fig. 162. Fig. 163.

Æquè procedit methodus, etiamsi recta AK ponatur infinita.

Fig. 162. *Exemp.* 1. Sit KL *recta linea*; erit curva CGE *Hyperbola*.

Fig. 163. 2. Sit linea KL *Arcus Circuli*, cujus *Centrum* D; & AK = Z.

$= Z$; erit curva AGF *Circulus*; & curva $AB = \frac{AD}{2} + \frac{DL}{2\,AK}$ arc. KL.

3. Sit linea KL *Hyperbola æquilatera*, cujus *Centrum* A, & *Axis* $AK = Z$; erit CGE recta linea; & curva AB *Parabola*. Fig. 164.

4. Sit Linea KL *Parabola* (cujus axis AD) erit curva CGE quoque *Parabola*; & curva AB *Paraboliformium* quædam. Fig. 163.

5. Sit curva KL *Paraboliformis* quædam inversa, vel infinita (talis scilicet ut sit $FH = \sqrt{\frac{Z^2}{AF}}$) erit curva AB *Cycloïs*, ad *circulum* pertinens, cujus *Diameter* ipsi Z æquatur. Fig. 165.

Elegantiora forsan *Exempla* ipse circumspectans excogitabis.

APPENDI-

APPENDICULA I.

HIc demùm etsi præter institutum sit particularia nunc attingere; qualibus sanè, hæc generalia consequentibus, admodum proclive foret turgidum Volumen compingere (*amicò tamen morem gerens operâ* dignum censenti) subtexam ad *Circuli Tangentes Secantésq;* spectantia nonnulla, pleraque de suprà positis emergentia.

Præparatio Communis.

Fig. 166. Esto *circuli Quadrans* A C B, quam tangant rectæ A H, B G; & in productis H A, A C sumantur A K, C E singulæ pares *radio* C A; & *asymptotis* A C, C Z per K descripta sit *Hyperbola* K Z Z; *asymptotis* B C, B G per E *hyperbola* L E O. Sumatur etiam in arcu A B

Fig. 167. *punctum arbitrarium* M, per quod ducantur recta C M S (tangenti A H occurrens in S) recta M T circulum tangens; recta M F Z ad B C parallela, recta M P L ad A C parallela. Sit denuò recta $\alpha\zeta$ æqualis *arcui* A B, & $\alpha\mu$ arcui A M; & rectæ $\alpha\gamma$, $\xi\mu\varpi\psi$ rectæ $\alpha\zeta$ perpendiculares; quarum $\alpha\gamma = AC$; $\mu\xi = AS$; $\mu\psi = CS$; $\mu\varpi = MP$.

I. Recta C S æquatur rectæ F Z; adeoque *summa secantium ad arcum* A M pertinentium, & ad rectam A C applicatarum æquatur *spatio hyperbolico* A F Z K.

Est enim $CF \cdot CA :: (CM \cdot CS ::) CA \cdot CS$. adeòque $CF \times CS = CAq$. item $CF \times FZ = CA \times AK = CAq$. ergo $CS = FZ$.

Fig. 167. II. *Spatium* $\alpha\mu\xi$ (hoc est *Summa tangentium in arcu* A M ad rectam $\alpha\mu$ applicatarum) æquatur *spatio hyperbolico* A F Z K.

Patet ex hujusce Lectionis 9. III.

III Curva A X X talis sit, ut P X secanti C S (vel C T) æquetur; *spatium* A C P X hoc est *Summa secantium ad arcum* A M pertinentium, & ad C B applicatarum) æquatur *duplo sectori* A C M.

Nam (a) *spatium* A F M X *Segmenti* A F M *duplum* est; & *rectangulum* F C P M *Trianguli* F C M. ergò *totum spatium* A C P X totius *sectoris* A C M duplum est. Fig. 166. (a) 10. Lect. XI.

Etiam hoc è 16. hujus duodecimæ Lectionis apertè constat.

IV. Curva C V V talis sit, ut P V *Tangenti* A S æquetur; erit *spatium* C V P (hoc est *summa tangentium ad arcum* A M *pertinentium*, & ad rectam C B applicatarum) æquale *semissi quadrati ex subtensa* A M. Fig. 166.

Manifestè consectatur ex septima undecimæ Lectionis.

V. Acceptâ C Q = C P; & ductâ Q O ad C E parallelâ (quæ *hyperbolæ* L E occurrat in O) erit *spatium hyperbolicum* P L O Q ductum in *radium* C B (seu *cylindricum* ad basin P L O Q, altitudine B C (duplum *summæ quadratorum* ex rectis C S, seu P X ad *arcum* A M pertinentibus, & ad rectam C B applicatis. Fig. 166.

Nam quia P L. Q O :: (B Q. B P. hoc est ::) B C + C P. B C — C P; erit componendo P L + Q O. Q O :: 2 B C. B C — C P. item est Q O. B C :: B C. B C + C P; ergò (pares rationes adjungendo) est P L + Q O. Q O + Q O. B C = 2 B C. B C — C P + B C. B C + C P; hoc est P L + Q O. B C :: 2 B C q. B C q — C P Q (hoc est ::) 2 B C q. P M q. verùm est P X q. B C q :: B C q. P M q. vel (antecedentes duplando) 2PXq. BCq :: 2BCq.PMq. ergò PL+QO.BC :: 2PXq. BCq. vel PL×BC+QO×BC.BCq::2PXq. BCq. quare PL × BC+QO × BC=2PXq. itaque B C in omnes PL + Q O ducta adæquat omnia totidem PXq. unde constat Propositum.

VI. Hinc spatium $\alpha\gamma\psi\mu$ (hoc est *summa secantium in arcu* A M ad $\alpha\zeta$ applicatarum) æquatur *subduplo spatio hyperbolico* P L O Q. Fig. 167.

Nam sumatur arcus M N indefinitè parvus, & huic æqualis recta $\mu\nu$, ducatúrque recta N R ad A C parallela. Estque M N. M R :: (MC. C F :: C S. C A :: P X. C A ::) P X q. P X × C A. adeóque M N × P X × C A = M R × P X q. seu $\mu\nu \times \mu\psi$ × C A = M R × P X q. atqui (ex præcedente) omnium M R × P X q summa spatii P L O Q in C A ducti subdupla est. Ergò omnia totidem $\mu\nu \times \mu\psi$ in C A ducta eidem subduplo æquantur. quare spatium $\alpha\gamma\psi\mu$ (omnibus

nibus

nibus $\mu\nu \times \mu\psi$ par) æquatur subduplo spatii P L O Q.

Fig. 167. VII. Omnia quadrata ex rectis $\mu\psi$ (ad rectam $\alpha\mu$ applicais) æquant C A × C P × P X (hoc est *parallelipipedum Base Rectangulo* A C P D, *Altitudine* C S).

Hujus *Effati demonstrationem* (quanquam πρόχειρον) transilio; quoniam aliud *Schema* discursúmque præ reliquis plerísque longiusculum exposcit; neque rem tanti video.

Fig. 166. VIII. Curva A Y Y talis sit, ut F Y æquetur ipsi A S; ductâ tum rectâ Y I ad A C parallela, erit etiam *spatium* A C I Y Y A (hoc est *summa Tangentium* ad *arcum* A M pertinentium, & ad rectam A C applicatarum, unà cum *rectangulo* F C I Y) æquale *subduplo spatio hyperbolico* P L O Q.

(a) 1. Lect. XII. Nam *spatium* $\alpha\gamma\pi\mu$ (a) æquatur *rectangulo* A C P D; hoc est *rectangulo* F C I Y (nam est C A . A S :: C F . F M; vel C A . F Y :: C F . C P. adeoq; C A × C P = F Y × C F). item spatium $\gamma\pi\psi$ (hoc est omnes

(b) 14. Lect. XII. rectæ T F ad αc applicatæ, quotquot ad arcum A M pertinent) (b) æquatur *spatio* A F Y; ergo *spatium* A C I Y A æquatur *spatio* $\alpha\gamma\psi\mu$; hoc est (ut mox ostensum) *semissi spatii hyperbolici* P L O Q.

Aliter illud, (eíque connexa) dimensus sum, *hoc præmisso Lemmate*.

IX. Sit *Hyperbola æquilatera* (axes nempe pares habens) E R K ad

Fig. 168. cujus axes C E D, C I; & ad hos ordinatæ K I, K D; sit item curvâ E V Y talis, ut in *hyperbola* liberè sumpto puncto R, ductâque recta R V S ad D C parallelâ, sint S R, C E, S V continuè proportionales; connexâ rectâ C K, erit *Spatium* C E Y I *Sectoris hyperbolici* K C E duplum.

Nam ducatur R T *hyperbolam* tangens, & R H ad C I parallela. Estque C H . C E :: C E . C T. quare C T = S V; vel H T = R V. itaque *Spatium* E D K Y duplum est *segmenti* E D K. item *rectangu-*

10. Lect. XI. *lum* I K D C *trianguli* C D K duplum est; ergo *reliquum spatium* C E Y I *reliqui sectoris* E C K duplum est.

Fig. 169. X. Resumptâ jam quadrante circulari A C B, sit C E = C A; & axe A E, *parametro* etiam A E, descripta sit *Hyperbola* E K K; positóque curvam A Y Y talem esse, ut ordinatâ quâcunque rectâ M F Y, sit F Y tangenti A S æqualis; ducatur recta Y I K (rectam

C Z,

C 2 secans in I, *hyperbolam* in K) & connectatur C K; erit spatium A C I Y A *sectoris hyperbolici* E C K duplum.

Nam est C I q . C A q :: A S q . C A q :: F M q . C F q :: C A q — C F q . C F q. componendoque C I q + C A q . C A q :: C A q . C F q. hoc est (ex *hyperbolæ* natura) I K q. C A q :: C A q. C F q. vel I K . C E :: C E . I Y. itaque *spatium* A C I Y A *sectoris* E C K duplum esse perspicuum est è præcedente. Fig. 169.

XI. *Coroll.* Hinc si *Polo* E, *Chordâ* C B, *Sagittâ* C A descripta sit *Conchois* A V V; cui occurrat Y F M producta in V; erit M V = F Y; adeóque *spatium* A M V *spatio* A F Y æquatur.

XII. Unde *spatiorum* ejusmodi *Conchoidalium dimensiones* innotescunt.
XIII. Nescio, an *operæ* sit hoc adjicere *Corollarium*.

XIII. Sit recta A E rectæ R S perpendicularis; & C E = C A; sintque duæ (sibimet inversæ) *Conchoides* A Z Z, E Y Y ad eundem *polum* E, *communémque regulam* R S descriptæ, ab E vero ducatur utcunque recta E Y Z (lineas intersecans, ut vides) sit etiam *hyperbole æquilatera*, E K K, cujus *centrum* C, *semiaxis* C E; ductâque I K ad A E parallelâ, connectatur C K, erit *spatium quadrilineum* AEOYZPA (rectis A E, Y Z, & *conchis* E O Y, A P Z comprehensum) æquale *quadruplo sectori Hyperbolico* E C K. Fig. 170.

Nam si *centro* E per C ducatur *arcus circularis* C X; è dictis facilè colligetur *spatium* A P Z I C æquari *duplo sectori Hyperbolico* E C K unà cum *sectore circulari* CEX. item *spatium* E O Y I C æquari *duplo sectori* E C K, *dempto sectore* C E X.

Ità quoque facile colligas. Ducantur Z F; Y G ad C S parallelæ; & protrahantur G Y L, L I H. ac ob I Y = I Z, est F Z + G Y = 2 C I. & *trapezium* F G Y Z = *rectang.* E G L H = 2 C G × C I. ergò patet.

Adnotari potest, si lubet, ductâ A T ad C S parallelâ, protractâque E Z T, si ponatur N = 2 triang. C E I — 2 sect. E C K; fore spat E Z T + E O Y E = 2 N.

Nempe N + C X I = spat. A Z T. & N — C X I = spat. E O Y E.

XIV. Adjiciemus etiam hisce cognatam *Cissoidalis spatii* dimensionem.

Sit *Semicirculus* A M B (cujus centrum C) quem tangat recta A H; eique congruens *Cissois* A Z Z cujus scilicet hæc proprietas est, Fig. 171.

Q ut

Fig. 171. ut in *circumf.* A M B sumpto utcunque puncto M, & per hoc trajectâ rectâ B M Z, ductâque rectâ M F Z, quæ curvam A Z Z secet in Z, sit M Z = A S) in recta verò $\alpha\zeta$ sumatur $\alpha\mu$ æqualis arcui A M, & ad $\alpha\mu$ applicentur rectæ perpendiculares $\mu\xi$ æquales *arcuum* AM *sinubus versis* A F; erit *spatium trilineum* M A Z *spatii* $\alpha\mu\xi$ *duplum*.

Nam sumatur *arcus* M N indefinitè parvus, & ei æqualis $\mu\nu$; ducatúrque recta N R ad A B parallela, connectatúrque recta C M. Estque jam A S. A B (2 C M) : : (F M . F B : :) A F. F M. & 2 C M. 2 M N : : C M : M N : :) F M. N R. quapropter erit ex æquo A S. 2 M N : : A F. N R; & ideò N R × A S = 2 M N × A F. hoc est N R × M Z = 2 $\mu\nu \times \mu\xi$. unde *spatium* M A Z *duplo spatio* $\alpha\mu\xi$ æquatur.

Hinc cum *spatii* $\alpha\mu\xi$ dimensio vulgò nota sit, & è suprà positis

Fig. 172. etiam facilè deducatur; habetur *spatii cissoidalis* M A Z *dimensio*. calculum ineat qui volet.

Ista claudet hoc *Consectariolum*:

XV. Sit *circuli quadrans* A C B, *circulúmque* tangant A H, B G;

Fig. 173. (a) 7, & 12. sintque curvæ K Z Z, L E O *hyperbola*, eædem quæ (a) superius. arcus verò sumptus A M in partes divisus concipiatur indefinitè multas punctis N; per quæ trajiciantur radii C N; & his occurrant rectæ N X ad puncta X; *summa rectarum* N X (in radiis) æquatur spatio $\frac{AFZK}{Rad.}$; & *summa rectarum* NX (in parallelis ad AS) æquatur *spatio* $\frac{PLQO}{3\ Rad.}$.

Nam triangulum X M N triangulo S A C simile est; & inde X M. MN : : A S. C A. & X N. M N : : C S. C A. unde $XM = \frac{MN \times AS}{CA}$; & $XN = \frac{MN \times CS}{CA}$. & ità in reliquis; unde liquet Propositum, ex 2, & 7 harum.

APPEN-

APPENDICULA 2.

BRevitati simul ac perspicuitati (huic autem præcipuè) consulentes præcedentia recto discursu comprobata dedimus; quali non modo veritas, opinor, satis firmatur, at ejusdem origo limpidiùs apparet. Verùm nè quis, minùs hujusmodi ratiociniis adsuetus, hæreat, ista paucula subdemus, quibus tales discursus communiantur, quorumque subsidio non difficilè conficiantur *Propositorum demonstrationes apagogicæ*.

I. Sint quotlibet *rationes* A ad X, B ad Y, C ad Z, singulæ designatâ quâpiam ratione R ad S majores; erit *omnium antecedentium* (simul acceptarum) ad *omnes consequentes ratio* major ratione R ad S.

A . X .	A . M .
B . Y .	B . N .
C . Z .	C . O .

Nam sint rationes A ad M, B ad N, C ad O singulæ æquales rationi R ad S. ergò $X \sqsupset M$; & $Y \sqsupset N$; ac $Z \sqsupset O$. patet igitur fore $A + B + C . X + Y + Z \sqsubset A + B + C . M + N + O$. hoc est $A + B + C . X + Y + Z \sqsubset R . S$.

II. Hinc patet, si quotlibet rationes singulæ designabili quâcunque majores sint, *antecedentium summam ad summam consequentium* etiam designabili quâcunque majorem rationem habere.

III. Sit curva quævis A D B, cujus axis A D, & ad hunc applica- Fig. 174.

ta recta B D; curvam verò tangat recta B T; sitque B P rectæ B D
Fig. 174. particula indefinitè parva; ducatúrque recta P O ad D T parallela, curvam secans ad N; dico P N ad N O rationem habere majorem quâvis designabili, puta quàm R ad S.

Nam sit D E . E T :: R S; connexaque recta B E curvam secet in G, rectam P O in K; per G verò ducatur F H ad D A parallela. quoniam igitur B P ponitur indefinitè parva, est B P ⊐ B F; adeoq; P K ⊐ P N (nam subtensa B G intra curvam tota cadit). ergo P N . N O ⊏ P K . K O :: D E . E T :: R . S.

IV. Hinc, si basis D B in partes secetur indefinitè multas ad puncta Z; & per hæc ducantur rectæ ad D A parallelæ curvam secantes punctis E, F, G; per hæc verò ducantur *Tangentes* B Q, E R, F S, G T parallelis Z E, Z F, Z G, D A occurrentes punctis Q, R, S, T; habebit recta A D ad omnes interceptas E Q, F R, G S, A T (simul sumptas) rationem quàvis assignabili majorem.

Nam ducantur rectæ E Y, F X, G V ad B D parallelæ. Habent
Fig. 175. igitur rectæ Z E, Y F, X G, V A ad rectas E Q, F R, G S, A T (singulæ ad singulas sibi in directum positas respectivè) rationem designabili quâcunque majorem. ergò simul omnes istæ ad has simul omnes *rationem* habent designabili quâvis *majorem*; hoc est recta AD ad E Q + F R + G S + A T ejusmodi rationem habet.

V. Hinc inter computandum, omnes E Q, F R, G S, A T simul acceptæ nihilo æquivalent; seu rectæ Z E, Z Q; & Z F, Y R, &c. æquantur; item tangentium particulæ B Q, E R, &c. respectivis *curvæ* portiunculis B E, E F, &c. pares, & quasi coincidentes haberi possunt. quin & adsumere tuto licet, quæ evidentèr his cohærent.

Fig. 176. VI. Sit porrò *curva* quævis A B, cujus *Axis* A D, & ad hunc applicata D B; æquisecetur autem D B in partes indefinitè multas ad puncta Z, per quæ ducantur rectæ ad A D parallelæ, curvam A B intersecantes punctis X; quibus occurrant per ipsa X ductæ ad B D parallelæ rectæ M E, N F, O G, P H; sit autem segmento A D B (rectis A D, D B, & curvâ A B comprehenso) *circumscripta figura* ADBMXNXOXPXRA major *spatio* quodam S; dico *segmentum* A D B non esse minus quam S.

Nam si fieri potest sit A D B minus quàm S excessu *rectangulum* A D L K adæquante. & quoniam A R est indefinitè parva, adeóque minor quàm A K, liquet rectangulum A D Z R minus esse *rectangulo* A D L K.

ADLK. item patet *segmentum* ADB unà cum *rectangulo* ADZR majus esse *figurâ circumscriptâ* (etenim *rectangulum* ADZR *rectangulis* RH, PG, OF, NE, MZ æquatur, proindeque majus est *trilineis* AXR, XXP, XXO, XXN, XBM). ergò *segmentum* ADB unà cum *rectangulo* ADLK multo majus est *figurâ circumscriptâ*; hoc est, *spatium* S majus est *figurâ circumscriptâ*, contra *Hypothesin*. Fig. 176.

VII. Item, si ponatur *figura inscripta* HXGXFXEXZDH minor *spatio quodam* S; dico *segmentum* ADB non esse majus quam S.

Nam si majus esse velis, esto rursum *excessus* par *rectangulo* ADLK; quod utique (sicut prius) majus erit *rectangulo* ADZR. Est autem *segmentum* ADB, dempto *rectangulo* ADZR, minus figurâ inscriptâ. ergò segmentum ADB, dempto rectangulo ADLK, multo minus fit inscriptâ figurâ; hoc est *spatium* S minus est inscriptâ figurâ, contra *Hypothesin*.

VIII. Hinc, si *spatium* quodcunque fuerit, (puta S) cui circumscripta figura æquetur *figuræ* ADBMNOPRA; nec non cui *inscripta figura æquetur figuræ* HGFEZDH; palam est *spatium* istud S *segmento* ADB exæquari.

Nam (uti mox ostensum) hoc illo majus esse nequit, aut minus.

Poterunt autem hæc ad *alios circumscriptionis* ac *inscriptionis modos* accomodari. sufficerit innuisse.

Conicorum Superficies dimetiendi Methodus.

Sit *curva* quæpiam AMB, cujus *Axis* AD, & in hoc signatum punctum C, ad ipsum verò ordinata recta BD. a puncto quopiam M in curva sumpto ducatur recta ME curvam tangens, & à C demittatur CG ad ME perpendicularis; sit item determinata recta CV ad planum DAB recta, & connectatur VG. (erit VG ipsi MG perpendicularis; nam si ducatur CH ad GM parallela, liquet CH plano GVG rectam esse, adeoque GM eidem recta erit) Porro sit linea RS talis, ut ductâ rectâ MIX ad AD parallelâ (quæ secet ordinatam. Fig. 177.

dinatam B D in I, & lineam R S in X) ſit M P . M E : : V G . I X; vel, ſit linea A L talis, ut ductâ M P Y ad B D parallelâ (quæ ſecet axem A D in P, & lineam A L in Y) ſit P E . M E : : V G . P Y; erit Fig. 177. tunc utrumque *ſpatium* (ſingillatim) B R S D, vel A D L duplum *ſuperficiei conicæ*, quod ex recta per V & curvam A M B mota progeneratur.

Nam ſumatur M N indefinita curvæ particula; & per N ducantur rectæ N O K T ad ipſam A D, & N Q Z ad B D parallelæ (quæ lineas expoſitas, ut *Schema* monſtrat, ſecent) connectantúrque rectæ V M, V N. eſtque M O . M N : : M P . M E : : V G . I X. quare $MN \times VG = MO \times IX = IK \times IX$. Item eſt N O . M N : : P E. M E : : V G . P Y. unde $MN \times VG = NO \times PY = QP \times PY$. Eſt autem $MN \times VG$ duplum trianguli M V N. quapropter tam $IK \times IX$, quàm $QP \times PY$ duplum eſt *trianguli* M V N. pariter autem ubique fit. ergò conſtat Propoſitum.

Exemplum.

Fig. 177. Sit curva A M B *hyperbola æquilatera*, cujus *Centrum* C, ſitque $CV = CA = r$. & $CP = x$ (nam hujuſmodi *calculo* plerunque rem expedit peragere) tum connexâ M C; patet eſſe $EC = \frac{rr}{x}$; & $MCq = 2xx - rr$ (nam $PMq = xx - rr$) item eſt MCq. C P q : : M E q . M P q; hoc eſt M C q . C P q : : E C q . C G q. hoc eſt $2xx - rr . xx :: \frac{r^4}{xx} . CGq = \frac{r^4}{2xx - rr}$. quare $VGq = \frac{r^4}{2xx - rr} + rr = \frac{2rrxx}{2xx - rr} = \frac{VAq \times CPq}{MCq}$. vel $VG = \frac{VA \times CP}{MC}$. quare V G . V A : : (C P . M C) : : M P . M E. hinc conſectatur in hoc caſu, quum ubique ſit $IX = VA$, *lineam* R S fore *rectam*; & *rectangulum* B R S D *ſuperficiei conicæ* A M B V *duplum eſſe*.

Cæterùm hoc *elegans exemplum* ſuppeditavit Generoſus, ingenio ac eruditione præſtans, Vir (*Collegii noſtri, quod olim Sociorum Commenſalis incoluit*, ornamentum) *D. Franciſcus Jeſſopius*, Armiger; cujus in hanc rem perquam ingenioſo mihi comiter impertito ſcripto (ipſius injuſſu quidem, at ſpero non ingratiis) ſeu *Gemmâ* quâdam audebo mea condecorare.

Prop.

Prop. 1.

Si à puncto E in *axe* A *m coni recti* A B C *p* recta infinita E C transeat per *coni superficiem*, & quiescente termino E circumferatur recta E C donec redeat ad locum à quo cœpit moveri, ita ut semper aliqua pars ejus secet *coni superficiem* (puta per *Hyperbolam* C F D & rectas D A A C in superficie coni sitas) *solidum comprehensum à superficie vel superficiebus genitis à linea* E C sic mota & à *portione superficiei* ejusdem coni terminatæ à linea vel lineis C F D, D A, A C quas recta E C circumlata describit in *superficie conica*, erit æquale *Pyramidi* cujus *Altitudo* est æqualis *perpendiculari* E *n* à puncto E ad latus *Coni* deductæ *basis* verò æqualis eidem *superficiei conicæ terminatæ* à linea vel lineis C F D, D A, A C generatis à motu lineæ E C. Fig. 178.

Solidum enim E C F, D A C constat ex *infinitis pyramidibus* E C *o* A E *o o* A, &c. æquialtis perpendiculari E *n*, quarum bases omnes simul sumptæ, exhauriunt *superficiem conicam* C F D, D A, A C.

Prop. 2.

Datus sit *Conus rectus* A B C *p* secetur à plano C F D axi A *m* parallelo ducantur rectæ A C, A D à vertice *coni* ad *lineam hyperbolicam* C F D, & super *triangulo* A C D erigatur *pyramis* E A C D habens *verticem* E in *axe coni*; sitque E *δ* plano A C D perpendicularis, & E *n* lateri coni. Fig. 178.

Dico, *superficies conica* terminata à *linea hyperbolica* C F D & rectis D A, A C ita se habet ad A C D *basem pyramidis* E A C D ut *altitudo* E *δ pyramidis* E A C D ad perpendiculum E *n*. Quoniam enim Conici A C F D; E C F D habent vertices A & E in plano basi C F D (quæ est utrique Conico communis) parallelo ergo sunt æquales Si ergò à solido quod componitur à conico A C F D addito pyramide E C A D auferatur conicus E C F D reliquum erit solidum E C F D A C quale in propositione prima describitur motu rectæ E C æquale pyramidi E A C D. Quoniam verò *æqualium pyramidum* reciprocæ sunt *bases altitudinibus*, ut *altitudo* E *δ pyramidis* E A C D ad perpendiculum E *n* ita erit *superficies conica* terminata à *linea hyperbolica* C F D & rectis D A, A C ad Triangulum A C D. q. E. D.

Prop.

Prop. 3.

Fig. 178. Datus sit *Conus rectus* A B C *p*. Secetur à plano (puta *triangulo* *q r t*) quod quidem planum secabit *axem coni* in puncto *q* supra *verticem* productum & in communi intersectione cum *superficie coni* habebit *lineam hyperbolicam* R S *t* ducantur à vertice coni A rectæ A *r*, A *t*, à puncto *q* demittatur perpendiculum *q* X lateri coni A *p* producto & à puncto A perpendiculum A Z plano *q r t*.

Dico *superficies conica* terminata a *linea hyperbolica*, *r s t* & rectis *r* A, *t* A, ita se habet ad *figuram hyperbolicam cavam q r s t q* ut *perpendiculum* A Z ad *perpendiculum q* X.

Recta enim *qr*, circumlata, quiescente termino *q* per lineas *rst*, *t* A, A*r* generat tres *superficies*, nempe *hyperbolicam cavam q r*, *s t*, & *duo triangula q t* A, *q* A *r*, quæ unà cum *superficie conica* terminata à lineis *r s t*, *t* A, A *r*, comprehendunt *Solidum q r s*, *t* A *r*. Hoc verò *solidum æquale* est *pyramidi* cujus *altitudo* est æqualis perpendiculo *q* X, nam infinitæ pyramides *q* A *r* V, *q* A V V, exhauriunt solidum *q r* S *t* A *r*. Si verò aliter contemplari volumus, hoc solidum *q r s t* A *r* potest considerari tanquam *figura conica* A *r* S *t q r* habens pro *base figuram hyperbolicam* cavam *q r* S *t q*, & pro altitudine *perpendiculum* A Z. Ergò reciprocando *bases altitudinibus*, ut A Z ad *q* X, ita *superficies*, *r* S *t* A *r* ad *figuram hyperbolicam cavam q r* S *t q*.

Prop. 4.

Fig. 179. Datus sit *Conus rectus* A B *h g* secetur à plano H F E G per axem infra verticem, a puncto H ubi *planum* secat *axem coni*, demittatur HK *perpendiculum* lateri cuilibet coni & à verticè A *perpendiculum* A L plano H F E G.

Dico, *Superficies conica* terminata à lineis F E G G A A F ita se habebit ad *planum* H F E G ut *perpendiculum* A L ad *perpendiculum* H K

Probatur eodem fere eodem fere argumento quo superior.

Præcedentia

APPENDICULA 3.

Præcedentia recolenti nonnulla videntur elapsa; quæ forsan ex usu sit adjicere. *Demonstrationes* elicere poterit quispiam è præmissis; & potior inde fructus emerget.

Problema I. Fig. 180.

Sit *curva* quævis KEG, cujus *axis* AD; & in hoc signatum punctum A; curva reperiatur, puta LMB, talis, ut si ductâ utcunque rectâ PEM axi AD perpendicularis curvam KEG secet in E, & curvam LMB in M; nec non connectatur AE, & curvam LMB tangat recta TM; sit TM ipsi AE parallela.

Hoc ità fiet. Per aliquodcunque punctum R, in axe AD sumptum, protendatur recta RZ ad ipsam AD perpendicularis; cui occurrat recta EA producta in S; & in recta EP sumatur PY = RS; ità determinetur curvæ OYY proprietas; tum sit rectangulum ex AR, & PM æquale spatio AYYP (seu $PM = \frac{\text{spat. } AYYP}{AR}$) habebit curva LMMB conditionem propositam.

Adnotari potest, si stantibus reliquis, sit curva QXX talis, ut cum hanc secet recta EP in X, sit PX = AS; erit spatium AXXP æquale rectangulo ex AR, & curva LM, seu $\frac{AXXP}{AR} = LM$.

Exemp. I.

Sit ADG *circuli* quadrans, & ductâ EP ad AD utcunque perpendiculari, connexâque DE; designetur curva AMB talis, ut si producta recta EPM hanc secet in M, ipsamque tangat recta MT, sit MT ad DE parallela. Hoc ita peragetur. Ducatur AZ ad DG parallela; & huic occurrat producta DE in S, & curva AYY talis sit, ut si hanc secet producta PE in Y, sit PY = AS; tum capiatur $PM = \frac{\text{Spat. } AYP}{AD}$; factum erit. Fig. 181.

Not. Quòd si curva QXX talis sit, ut PX = DS (vel si AQ = AD, & QXX sit *hyperbola* angulo ADG comprehensa) erit curva $AM \times AD =$ spat. AQXP.

Exemp. II.

Fig. 182. Sit curva A E G (cujus *axis* A D) proprietate talis, ut si à quocunque puncto in ipsa sumpto E, ducatur recta E P ad A D normalis; connectatúrque A E, sit A E inter designatam A R, & A P proportione media, secundum ordinem, cujus exponens sit $\frac{n}{m}$; reperiatur curva A M B, quam tangat T M ad A E parallela.

De curva A M adnoto fore $n \, . \, m :: $ A E . arc. A M.

Si $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$ (vel A E sit inter A R, A P simpliciter media) erit A E G circulus, & A M B *Ciclois primaria*; hujus igitur dimensio è lege generali habetur.

Hæc etiam ex adjuncto *Problemate* magis ccomprehensivo peraguntur.

Probl. II.

Fig. 183. Curva designetur, puta A M B, cujus *axis* A D, ità ut in hac sumpto puncto quopiam M, & ductâ M P ad A D perpendiculâri, & posito rectam M T ipsam tangere, habeant T P, P M relationem assignatam.

Accipiatur recta quæpiam R, & fiat ut T P ad P M (quam utique rationem assignatâ dabit relatio) ità R ad P Y (quæ nempe sumatur in recta P M, & ad axem A D ordinetur) sic ut per ejusmodi puncta Y transeat curva Y Y K; tum si fiat P M $= \frac{\text{spat. A P Y}}{\text{R}}$; de curvæ A M B indè constabit natura.

Exemp. I.

Fig. 184. Sit A D G *circuli* quadrans; cujus radius æquetur designatæ R; & habere debeat T P ad P M rationem eandem quam habet R ad arcum A E; ergo quum sit, juxta præscriptum, R. arc. A E : : R . P Y, erit P Y = arc. A E; hinc habetur P M $= \frac{\text{A P Y}}{\text{R}}$.

Exemp.

Exemp. II.

Sit A D G *circuli* quâdrans, & habere debeat T P ad P M rationem eandem quam P E ad R; eſt ergo P Y æqualis *tangenti* arcûs GE, & ſpat. A P Y Y = R × arc. A E. adeóque P M = arc. A E.

Probl. III.

Proponatur figura quælibet A D B (cujus *axis* A D, *baſis* D B) reperiatur curva K Z L, proprietate talis, ut ductâ rectâ Z P M ad D B utcunque parallela quæ lineas expoſitas ſecet ut cernis) poſitóque rectam Z T tangere curvam K Z L, ſit intercepta T P æqualis ipſi P M. Fig. 185.

Hoc ità perficietur. Sit curva O Y Y talis, ut adſumptâ quâdam R, protractâque P M Y, ſit P M . R : : R . P Y; tum liberè adſumptâ D L (in B D protensâ) ſit D L . R : : R . L E; & *aſymptotis* D L, D G per E deſcribatur *Hyperbola* E X X; tum ſit ſpatium LEXH æquale ſpatio D O Y P, & protractæ X H, Y P concurrant in Z; erit Z in curva quæſita; quam ſi tangat Z T, erit T P = P M.

Adnotetur, ſi propoſita figura ſit *rectangulum Parallelogrammum* A D B C, quod curvæ K Z L hæc erit proprietas, ut ſit D H eodem ordine inter D L, D O media *Geometricè* proportionalis, quo D P inter D A & *o* (ſeu nihilum) eſt media *Arithmeticè*; quod ſi liberè juxta proprietatem hanc deſcribatur curva K Z L, & *Mechanicè* reperiatur tangens Z T, indè quadrabitur *hyperbolicum ſpatium* LEXH; erit utique hoc æquale *rectangulo* ex T P, A P. Fig. 186.

Subnotari poſſit fore 1. Spat. ADLK = R × D L — DO. 2. Summam Z P q = R × : $\frac{DLq - DOq}{2}$. & ſummam Z P cub. = R × $\frac{DL\,cub. - DO\,cub.}{3}$ &c. 3. Si ponatur φ eſſe centrum gr. figuræ A D L K, ducantúrque $\varphi\psi$ ad A D, & $\varphi\xi$ ad D L perpendiculares, fore $\varphi\psi = \frac{DL + DO}{4}$, & $\varphi\xi = R - \frac{AD \times DO}{LO}$.

Probl. IV.

Fig. 187. Sit angulus B D H rectus, & B F ad D H parallela; & *asymptotis* D B, D H per F descripta sit *hyperbola* F X G; item centro D descriptus sit circulus K Z L; sit denuo curvâ A M B talis, ut in hac sumpto quocunque puncto M, & per hoc trajectâ rectâ D M Z, item sumptâ D I = D M; & ductâ I X ad B F parallelâ, sit *spatium hyperbolicum* B F X I æquale duplo *circulari sectori* Z D K; curvæ A M B tangens ad M determinetur.

Ducatur D S ad D M perpendicularis; sitque D B × B F = R q; fiatque D K . R :: R . P; tum D K . P :: D M . D T; & connectatur T M; hæc curvam A M B tanget.

Adnotetur curvæ A M B hanc esse proprietatatem; ut D I sit inter D B, D O (vel D A) eodem ordine *media proportionalis Geometricè*, quo arcus K Z inter *o* (seu nihilum) & arcum K L est medius *Arithmeticè*. hoc est, si D I sit numerus in serie *Geometricè proprtionalium* incipiente à D B, & terminatâ in D A; ac *o*, K L sint Logarithmi ipsarum D B, D A; erit K Z Logarithmus ipsius D I. Vel retrò (prout vulgares *Logarithmi* procedunt, si D I sit numerus in serie *Geometrica* exorsa à D O, & desinente in D B ac *o* sit *Logarithmus* ipsius D O, & arcus L K ipsius D B, erit arcus L Z *Logarithmus* ipsius D I.

Quod si absolutè construatur curva A M B, ejúsque *tangens Mechanicè* deprehendatur, inde patet *hyperbolici spatii Cyclismum* dari, vel *Circuli hyperbolismum*.

Hujusce *Spiralis* naturam, ac dimensionem (ut & Spatii B D A dimensionem) luculentè prosecutus est præclarissimus D. *Wallissius*, in Libro de *Cycloide*; quapropter de illa plura reticeo.

Probl. V.

Sit spatium quodpiam E D G (rectis D E, D G, & linea E N G
Fig. 188. comprehensa) & data quædam R; curva A M B reperiatur talis, ut si utcunque a D projiciatur recta D N M, & D T ad hanc perpendicularis sit, & M T curvam A M B contingat; sit D T . D M :: R . D N.

Sit curva K Z L talis, ut D Z = $\sqrt{}$ R × D N; sumptâque liberè rectâ

rectâ DB, sit DB . R : : R . BF (sit autem BF, ut & DH ipsi DB perpendicularis) tum per F, angulo BDH inclusa, transeat *hyperbola* FXX; sitque spatium BFXI (positâ nempe IX ad BF *parallelâ*) æquale duplo spatio ZDL; sit denuò DM = DG; erit M in curva quæsita; quam utique si tangat recta TM, erit TD . DM : : R . DN.

Probl. VI.

Sit rursus spatium EDG (ut in præcedente) reperienda est curva AMB, ad quam si projiciatur recta DNM, & sit DT huic perpendicularis, & MT curvam AMB tangat, fuerit DT = DN. Fig. 188.

Adsumatur quæpiam R, & sit $DZq = \frac{R^3}{DN}$; item acceptâ DB (cui perpendiculares DH, $BF = \frac{R^3}{DBq}$; & per F intra *asymptotos* DB, DH describatur *hyperboliformis* secundi generis (in qua nempe ordinatæ, ceu BF, vel IX, sint quartæ proportionales in ratione DB ad R, vel DG ad R) tum capiatur spatium BIXF æquale duplo ZDL; & sit DM = DI; erit M in curva quæsita; quam si tangat MT, erit DT = DN.

Probl. VII

Sit figura quævis ADB (cujus *axis* AD, *basis* DB) & utcunque ductâ PM ad DB parallelâ datum sit (seu expressum quomodocunque) spatium APM, oportet hinc ordinatam PM exhibere, vel exprimere. Fig. 189.

Acceptâ quâqiam R, sit R × PZ = APM; hinc emergat linea AZZK; huic perpendicularis reperiatur ZO; tum erit PZ . PO : : R . PM.

Exemp. AP vocetur x & sit $APM = \sqrt{rx^3}$, ergo $PZ = \sqrt{\frac{x^3}{r}}$; unde reperietur $PO = \frac{3xx}{2r}$. Estque $\sqrt{\frac{x^3}{r}} . \frac{3xx}{2r} : : r . \frac{3}{2}\sqrt{rx} = PM$. unde AMB est *Parabola*, cujus *Parameter* est $\frac{9}{4}r$. *Aliter.*

Aliter. Fiat $PZ = \sqrt{2 APM}$. & sit ZO curvæ AZK perpendicularis; erit $PM = PO$.

Exemp. Sit $AP = x$; & $APM = \frac{x^3}{r}$. quare $PZ = \sqrt{\frac{2x^3}{r}}$ unde reperietur $PO = \frac{3xx}{r} = PM$; & rursus AMB erit *Parabola*.

Probl. VIII.

Fig. 190. Sit figura quævis ADB (rectis DA, DB, & linea AMB comprehensa) & à D utcunque projectâ rectâ DM, datum sit spatium ADM; oportet rectam DM definire.

Acceptâ quâpiam R, sit $DZ = \frac{2 ADM}{R}$; & ZO curvæ AZK perpendicularis; cui occurrat DH ad DM perpendicularis; erit $DM = \sqrt{R \times DO}$.

Aliter. Sit $DZ = \sqrt{4 ADM}$; & ZO curvæ AZK perpendicularis; cui occurrat DH ad DZ perpendicularis; erit $DM = \sqrt{DZ \times DO}$.

De figuris involutis & evolutis bellam σκέψιν instituit *Præclarus Geometra D. Gregorius Alerd.* Alienæ messi nollem ego falcem meam immittere, verùm liceat utcunque isthuc pertinentes (aliud agenti quæ mihi se ingesserunt) unam aut alteram observatiunculam his intexere.

Probl. IX.

Fig. 191. Data sit figura quæpiam ADB (cujus *axis* AD, *basis* DB) oportet ei congruentem involutam exhibere.

Fig. 192. *Centro* C, intervallo quopiam CL describatur *Circulus* LXX; sit autem curva KZZ talis, ut pro lubitu ductâ rectâ MPZ ad BD parallelâ,

rallelâ, sit rectangulum ex PM, PZ æquale quadrato ex CL (vel $PZ = \frac{CLq}{PM}$). Sit tum arc. $\dot{L}X = \frac{\text{spat. } D\dot{K}ZP}{CL}$ (vel sector LCX subduplus spatii DKZP) & in CX capiatur $C\mu = PM$; erit linea $\zeta\mu\mu$ ipsius BMA involuta; vel spatium $C\mu\zeta$ spatii ADB.)

Exemp. Sit A D B circuli quadrans; erit ergò (quod è præmonstratis constat) spat. DKZP (2 sector LCX). sect. BDM :: CLq. DBq. unde arc. LX. arc. BM :: CL. DB. quare ang. LCX = ang. BDM = ang. DMP. unde ang. $C\mu\zeta$ est rectus, adeóque linea $\zeta\mu$C est *semicirculus*.

Coroll. 1. Subnotari potest, si duæ figuræ ADB, ADG analogæ fuerint; & harum *involuta* sint $C\mu\zeta$, $C\gamma\gamma$; & fuerit $C\mu$. $C\gamma$ :: DB. DG; erit reciprocè ang. $\zeta C\mu$. $\zeta C\gamma$ :: DG. DB. Fig. 193.

2. Illud etiam conversè valet.

3. Sin curvæ $C\gamma\gamma$, $CS\zeta$ suo modo analogæ fuerint, hoc est, si utcunque à C projectâ rectâ $C\gamma S$, habeant $C\gamma$, CS eandem perpetuò rationem, erunt hæ similium linearum *involuta*. Fig. 194.

Probl. X.

Data figurâ quâpiam $\zeta C\varphi$ rectis $C\zeta$, $C\varphi$, & aliâ lineâ $\zeta\varphi$ comprehensâ, ei competentem *evolutam* designare. Fig. 195.

Centro C utcunque describatur *circularis arcus* LE (cum rectis $C\zeta$, $C\varphi$ constituens sectorem LCE) tum ductâ CK ad LC perpendiculari, sit curva ζYH ità rectam CK respiciens, ut liberè projectâ rectâ $C\mu Z$, sumptâque CO = arc LZ, ductâque OY ad CK perpendiculari, sit OY = $C\mu$; porrò ad rectam DA sic referatur curva BMF, ut cùm sit $DP = \frac{\text{spat. } C\zeta YO}{CL}$; & PM ad DA perpendicularis; sit etiam $PM = C\mu$; erit spatium DBFA ipsius $C\zeta\varphi$ *evolutum*. Fig. 196.

Exemp. Sit LZE arcus circuli centro C descripti, & $\zeta\mu$C ejusmodi *spiralis* Fig. 197.

spiralis, ut pro arbitrio ductâ rectâ $C\mu Z$ habeat arcus EZ ad rectam $C\mu$ rationem assignatam (puta R ad S). Manifestum est lineam ϛ Y H esse rectam, quoniam EZ (KO). $C\mu$ (OY) :: R . S, perpetuò.
Fig. 198. unde evoluta B M F fit *Parabola*; quoniam axis partes A P, A D se habent ut spatia K O Y, K C ϛ, hoc est ut quadrata ex ipsis OY, Cϛ, vel ex ipsis P M, D B.

Corol. Theor. I.

Si ad figuram ϛ C φ erigatur *cylindricus* altitudinem habens æqualem peripheriæ integræ *circuli*, cujus radius C L; erit iste *cylindricus* æqualis *solido*, quod procreatur è figurâ C ϛ H K circa axem C K rotatâ.

Theor. II.

Fig. 195. Sit curva quæpiam A M B (cujus axis A D, basis D B) & curva AZ L talis, ut liberè ductâ rectâ Z P M, sit $PZ = \sqrt{2APM}$; sit item alia curva O Y Y talis, ut ad hanc productâ rectâ Z P M Y, adsumptâque rectâ R, sit Z P q . R q :: P M . P Y; sitque denuò D L.
Fig. 199. R :: R . L E. & per E intra angulum L D G describatur *Hyperbola* E X X; huic autem occurrat ducta recta Z H X ad A D parallela, erit spatium P D O Y æquale *spatio Hyperbolico* L H X E.

Hinc *summa* omnium $\frac{PM}{APM} = \frac{2LEXH}{Rq}$.

Theor. III.

Sit curva quæpiam A M B, cujus axis A D, basis D B; & curva R Z L talis, ut adsumptâ quâdam R, & arbitrariè ductâ rectâ Z P M ad B D parallelâ, sit $\sqrt{APM}$. P M :: R . P Z; erit spatium ADLK
Fig. 200. æquale *rectangulo* ex R in $2\sqrt{ADB}$; vel $\frac{ADLK}{2R} = \sqrt{ADB}$.

Exemp. Sit A D B circuli quadrans, erit summa omnium $\frac{PM}{APM} = \sqrt{2DA} \times$ arc. AB.

Theor. IV.

Sit curva quæpiam A M B (cujus axis A D, basis D B) sintque duæ lineæ E X K, G Y L ità relatæ, ut in curva A M B sumpto quopiam

am puncto M, ductisque rectis M P X ad B D, & M Q Y ad A D parallelis, positoque rectam M T tangere curvam A M B, sit T P. P M :: Q Y. P X; erunt figuræ A D K E, D B L G sibimet æquales. Fig. 201.

Valet hoc conversum. Nempe si figuræ A D K E, D B L G æquentur, & M T curvam A M B tangat, erit T P. P M :: Q Y. P X.

Not. Omnium hactenus Propositorum fœcundissimum est hoc *Theorema*; præcedentium quippe complura vel in eo continentur, aut ab eo facilè consectantur. Nam posito lineam A M B indeterminatam esse naturâ, si ipsarum E X K, G Y L alterutra pro tuo arbitratu determinetur, exinde resultabit Theorema quoddam ejusmodi, qualia superiùs exhibentur aliquammulta. Si *e. g.* linea G Y L ponatur recta cum ipsa B D semi-rectum constituens angulum (quo casu concipiuntur puncta D, G coincidere) proveniet indè prima *Lectionis* XI. Si G Y L sit recta ad D B parallela, emerget *Lectionis ejusdem*. Rursus si P M = P X (vel lineæ A M B, E X K sint eædem) consequetur hinc *decima* ejusdem. Exhinc porrò liquet adsumpto cuilibet spatio *infinitis*, *genere diversis*, *spatia æqualia* facilè designari veluti si *spatium* D G L B ponatur *circuli quadrans*, cujus *centrum* D; & curva A M B sit *parabola*, cujus *axis* A D, emerget curvæ E X K hæc proprietas, ut (si dicatur D B = r; A P = x; P X = y; & k (vel $\frac{DBq}{2AD}$) sit *parabolæ semiparameter*) sit $\frac{rrk}{2} = kkx + xyy$. Sin A M B ponatur *hyperbola*, procreabitur alterius generis curva E X K. Fig. 202.
his autem expensis ἀβλεψίαν meam incuso, qui non hoc *Theorema* (sicut & ea quæ subsequuntur, quorum ferè ratio consimilis est, & suppar usus) primo loco posuerim, & ex eo (nec non è reliquis mox subjiciendis) quod fieri posse video, reliqua deduxerim. Veruntamen hujusmodi *Phrygiam sapientiam* juxta mecum plerisque familiarem autumo, literas has tractantibus.

Theor. V.

Sit spatium quodpiam A D B (rectis D A, D B, & curva A M B comprehensum) sint item curvæ E X K, G Y L ità relatæ, ut si in curva A M B liberè sumatur punctum M, ducatur D M X, sit D Q = DM, ducatur Q Y ad D B perdendicularis, sit D T ad D M perpendicularis, recta M T curvam A M B contingat; si, his inquam suppositis, sit T D. DM :: DM × Q Y. D X q; erit spatium DGLB spatii E D K duplum. Fig. 203.

S *Theor.*

Theor. VI.

Fig. 204. Sit rursus A M B curva quævis (cujus axis A D, basis D B) & curvæ E X K, H Z O ita versus se, & axes A D, $\alpha\zeta$ relatæ, ut arbitrariè in curva A M B accepto puncto M, & ductâ M P X ad A D perpendiculari, sumptâ $\alpha\mu =$ arc A M, ductâ μ Z ad $\alpha\zeta$ perpendiculari, positóque rectam T M curvam A M B tangere; sit T P . T M :: μ Z . P X; erunt spatia A D K E, $\alpha\zeta$ O H æqualia sibi.

Theor. VII.

Fig. 204, 205. Sit spatium quodpiam A D B (rectis D A, D B, & curvâ A M B definitum) sint item curvæ E X K, H Z O ità relatæ, ut si quodvis capiatur punctum M in curva A M B, projiciatur recta D M X, sumatur $\alpha\mu =$ arc A M; ducatur μ Z ad rectam $\alpha\zeta$ perpendicularis; sit D T perpendicularis ipsi D M; recta M T curvam A M B tangat; sit T D . T M :: D M × μ Z . D X q; erit spatium $\alpha\zeta$ O H spatii E D K duplum.

Sed horum hic esto terminus.

LECT

Lect. XIII.

Æ *Quationum* naturam è terminorum *analogia* exposuit *Vieta*; illam ex eorum in se ductu dilucidiùs explicuit *Cartesius*. Eam ego jam è linearum singulis appropriatarum descriptione conabor aliquatenus enucleatam dare; qui sanè modus rem præsertim elucidare videtur, ac ob oculos ponere, agedum.

Notetur, In sequentibus perpetim ad easdem series redigi æquationes, quæ *coefficientes* habent easdem.

Æquationum Series prima.

$a + b = n.$
$aa + ba = nn.$
$a^3 + baa = n^3.$
$a^4 + ba^3 = n^4$,&c.

Sumatur recta B A æqualis coefficienti b, & hæc versus H indefinitè protendatur; sint anguli R A H, S B H semirecti, sintque lineæ A L L, A M M, A N N tales, ut rectâ G K ductâ ad A H utcunque perpendiculari (quæ dictas lineas ordine secet punctis L, M, N; rectasque B S, A R punctis K, Z) sit inter G Z, G K *media* G L *, *bimedia* G M, *trimedia* G M; hæ lineæ propositarum æquationum naturæ explicandæ inservient. Nam si A G (vel G Z) dicatur a; erit B G (vel G K) $= b + a$; atque G L q $= aa + ba$; & G M cub. $= a^3 + baa$; & G N $qq = a^4 + ba^3$. Fig. 206.

* Vid. *pag.* 90.

 Notetur

Notetur autem,

1. Ducta A D ad B H perpendiculari, si in hac capiatur $AE = n$; ducatúrque E F ad A H parallela; hujus cum lineis expositis interse-
Fig. 206. ctiones æquationum propositarum radices exhibebunt respectivè; erit utique F K, vel E L, vel E M, vel E N æqualis ipsi a; hoc est ipsis A G, concipiendo à singula interfectione deduci ad A H perpendiculares, quæ puncta G determinet.

2. Quò punctum G magìs à termino A removetur (& quidem potest G A desumi quavis designatâ major) eò ordinatæ G K, G L, G M, GN magìs increscunt; adeò ut quantacunque ponatur A E, parallela E F curvis occursura sit; & proinde semper habetur vera radix istarum æquationum cuilibet conveniens; & ea tantùm una, quoniam E F curvas istas unico puncto intersecat.

3. *Curva* A L L est *hyperbola æquilatera*, cujus *axis* A B, reliquæ A M M, A N N sunt *hiperboliformes*.

4. Si A O sit $\frac{1}{2}$ A B; & $AP = \frac{1}{3}AB$, & $AQ = \frac{1}{4}AB$, ducantúrque O T, P V, Q X ad B S parallelæ, erunt hæ curvarum ALL, AMM, ANN *asymptoti*.

5. Hinc constat in secundo gradu fore $a \sqsubset n - \frac{b}{2}$; in tertio $a \sqsubset n - \frac{b}{3}$; in quarto $a \sqsubset n - \frac{b}{4}$; quæ tamen inæqualitates, si A E benemagna sit, exiguæ erunt.

6. Æquationibus istis nulla competit *maxima*, *vel minima*.

Series secunda.

$$a - b = n.$$
$$aa - ba = nn.$$
$$a^3 - baa = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 = n^4, \text{ \&c.}$$

Fig. 207. Sit rursus $AB = b$; & indefinitè protrahatur A B versus I, & sint anguli R A I, S B I semirecti; tum concipiantur curvæ B L L, B M M, B N N tales, ut si utcunque ducatur G Z ad A I perpendicularis (dictas lineas secans, utì cernis, punctis K, L, M, N, Z) sit inter G Z,

GZ, GK media GL, bimedia GM, trimedia GN; propositas æquationes explicabunt hæ lineæ. Nam si AG (vel GZ) vocetur a; erit BG (vel GK) $= a - b$; & GLq $= aa - ba$; & GM cub. $= a^3 - baa$; & GN$qq = a^4 - ba^3$.

Not.

1. Ductâ AD ad AI perpendiculari, & EF ad AI parallelâ, si AE ponatur æqualis ipsi n; erunt EK, EL, EM, EN radices æquationum respectivæ, seu æquales quæsitis a.

2. Quoniam ordinatæ GK, GL, GM, GN à termino B versus I infinitè excrescunt, semper habetur una vera radix, & unica.

3. Curva BLL est *hyperbola aquilatera*, cujus *axis* AB, reliquæ curvæ sunt *hyperboliformes*.

4. Si AB bisecetur in O, trisecetur in P, quadrisecetur in Q, ducantúrque ad AR parallelæ OT, PV, QX, erunt hæ curvarum BLL, BMM, BNN *asymptoti*.

5. Hinc sequitur in secundo gradu fore $a \sqsubset n + \frac{b}{2}$; in tertio $a \sqsubset n + \frac{b}{3}$; in quarto $a \sqsubset n + \frac{b}{4}$; quòd si n satis magna sit, istæ inæqualitates ad æqualitatem proximè accedunt.

6. Verarum in his radicum habetur *minima*; scilicet ipsa AB, vel b.

Series tertia.

$b - a = n$.
$ba - aa = nn$.
$baa - a^3 = n^3$.
$ba^3 - a^4 = n^4$. &c.

Fig. 280.

Sit AB $= b$, & anguli RAB, SBA semirecti; tum curvæ ALB, AMB, ANB tales, ut ductâ rectâ GK ad AB utcunque perpendiculari (quæ lineas expositas secet, ut vides) sit inter AG (seu GZ) & GK *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; propositas æquationes explicatas dabunt hæ lineæ. Nam posito fore AG $= a$, erit GK $= b - a$; & GLq $= ba - aa$; & GMq $= baa - a^3$. & GNq $= ba^3 - a^4$.

Not.

Not.

Fig. 208. 1. Si in A D (ad ipsam A B perpendiculari) desumatur $AE = n$; & ducatur E F ad A B parallela, hujusce cum lineis expositis intersectiones exhibebunt radices a respectivè.

2. Cùm ad hasce curvas ordinatæ semper terminatæ sint, & inter ipsas maxima quædam detur, hujus *seriei æquationes*, pro modulo assignatæ A E (vel n) subinde duas radices veras habent (cùm utique fuerit A E curvæ maximâ ordinatâ minor respectivè, hoc est cùm E F curvæ bis occurrerit) nonnunquam duntaxat unam (cum A E nempe maximam adæquet, adeóque E F curvam contingat) aliquando nullam (cum scilicet A E maximam excedat, adeoque nec E F curvæ unquam occurrat).

3. In secundo gradu si $AO = OB$, & ordinetur O T, erit O T maxima; (adeóque radicum una major quàm $\frac{AB}{2}$, altera minor) in tertio, si $AP = 2\,PB$, & ordinetur P V, erit P V maxima (unde radicum una major erit quàm $\frac{2}{3}$ A B, altera minor) demùm in quarto gradu si $AQ = 3\,QB$, & ordinetur Q X, erit Q X *maxima* (& hinc una radicum semper major, quàm $\frac{3}{4}$ A B, & altera minor).

4. Hinc consectatur, si fuerit, in secundo gradu $n \sqsubset \frac{b}{2}$; in tertio $n^3 \sqsubset \frac{4b^3}{9} - \frac{8b^3}{27} = \frac{4b^3}{27}$; in quarto $n^4 \sqsubset \frac{27}{64}b^4 - \frac{81}{256}b^4 = \frac{27b^4}{256}$; nullam dari radicem.

5. Omnium radicum *maxima* est ipsa A B, vel b.

6. Omnium curvarum communis *intersectio* (seu *nodus*) est punctum T; & si fuerit $n = \frac{b}{2}$; semper A O (vel $\frac{b}{2}$) est una radix.

7. Curva A L B est *Circulus*, reliquæ A M B, A N B eum quodammodo referunt.

1.	2.	3.
$a + b = n$	$a - b = n.$	$b - a = n.$
$a + b = \frac{nn}{a}$	$a - b = \frac{nn}{a}$	$b - a = \frac{nn}{a}$
$a + b = \frac{n^3}{aa}$	$a - b = \frac{n^3}{aa}$	$b - a = \frac{n^3}{aa}$
$a + b = \frac{n^4}{a^3}$	$a - b = \frac{n^4}{a^3}$	$b - a = \frac{n^4}{a^3}$

Aliter

Aliter (& forte commodiùs; pro singulo trium serierum gradu tantùm unam adhibendo lineam) explicantur istæ præcedaneæ æquationes, hoc pacto:

Sit A H recta indefinitè protensa, & huic perpendicularis A D; in qua sumatur $AB = n$, & ducatur BK ad AH parallela, tum sint lineæ LXL, MXM, NXN tales, ut sumpto in AH quocunque puncto G, & ductâ GK ad AD parallelâ, sit in proportione AG ad GK (vel AB) proportione *tertia* GL, *quarta* GM, *quinta* GN; hæ lineæ propositarum æquationum naturæ explicandæ inservient. Fig. 209, 210.

Nam sumpta $AE = b$ (sumatur autem AE ob primam seriem ad partes I, ob secundam & tertiam ad partes H) & fiat angulus FEH semirectus (iste quidem pro prima & secunda serie inclinans versus H, pro tertia reclinans ab H, ut Schema satis monstrat) tum rectæ EF cum expositis lineis intersectiones respectivæ radices *a* determinabunt; nempe si per has ductæ concipiantur ad AH perpendiculares (LG, MG, NG) erunt interceptæ AG radicibus *a* æquales respectivè.

Not.

Exhinc constat, quòd

1. In hac explicatione *coefficiens b* indeterminata habetur; ut in præcedentibus ipsa *n*.

2. In prima & secunda serie semper una positiva radix habetur, & unica.

3. In secunda serie minima radix ipsi AB, vel *n* æquatur.

4. Communis omnium linearum *nodus* est *punctum* X, ubi BX (vel $a) = n$.

5. In tertia serie subindè duæ habentur radices positivæ (quando scilicet EF curvas bis secat) nonnunquam una tantum (cùm EF ipsarum aliquam contingat; id quod accidit in secundo gradu cùm $a = \frac{b}{2}$; in tertio cùm $a = \frac{2}{3} b$; in quarto cùm $a = \frac{3}{4} b)$ aliquando nulla, cùm EF infra tangentes cadit, & adeò nusquam curvis occurrit.

6. Secundi gradûs curva est *hyperbola*, reliquæ *hyperboliformes*; quarum communes *asymptoti* sunt rectæ AH, AD.

Series

Series quarta.

$$a + \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa + cc = nn.$$
$$a^3 + cca = n^3.$$
$$a^4 + ccaa = n^4.$$

Sit recta indefinitè protensa AH, & huic perpendicularis AD; fiat autem angulus RAH semirectus; tum utcunque ducatur GZK
Fig. 211. ad AD parallela; & facto AG.AC::AC.ZK; per K intra angulum DAR describatur *hyperbola* KXK; sint denuò curvæ CLL, AMM, ANN tales, ut inter GZ, GK sint *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ proposito deservient. Nam si AG (vel GZ) dicatur a, erit GK $= a + \frac{cc}{a}$; & GLq $= aa + cc$; & GMcub $= a^3 + cca$; & GNqq $= a^4 + ccaa$.

Not.

1. Designantur radices, ut in præcedentibus, positâ AE $= n$, & ductâ EF ad AH parallelâ.

2. Si AP = AC, erit PX ad *hyperbolam* KXK ordinatarum *minima*; unde si AE (vel n) $\sqsupset$ PX; nulla dabitur radix in primo gradu.

3. Curva CLL est *hyperbola æquilatera*, cujus *centrum* A, *semiaxis* AC; quæ & ordinatarum est *minima*; alioquin si $n \sqsubset c$, semper una vera radix habetur, & unica.

4. Reliquæ AMM, ANN sunt hyperboliformes ad infinitum excurrentes; unde semper una vera radix habetur, neque plures.

5. Si fuerit Y$\alpha = \frac{1}{2}$YX; Y$\beta = \frac{1}{3}$YX; Y$\gamma = \frac{1}{4}$YX, & per puncta α, β, γ, traductæ concipiantur *hyperbolæ* (habentes & ipsæ *asymptotos* DA, AR) $\alpha\lambda$, $\beta\mu$, $\gamma\nu$; erunt hæ ipsarum curvarum CLL, AMM, ANN *asymptoti*. (Similes etiam *asymptoti* conveniunt lineis posthac describendis, quanquam de illis conticeamus.)

6. Hinc in secundo gradu $a + \frac{cc}{2a} \sqsubset n$; in tertio $a + \frac{cc}{3a} \sqsubset n$; in

in quarto $a + \frac{cc}{4a} \sqsubset n$; quæ tamen inæqualitas eo minor eſt, quò A E (vel n) major exiſtit.

$$a + \frac{cc}{a} = n.$$
$$a + \frac{cc}{a} = \frac{nn}{a}.$$
$$a + \frac{cc}{a} = \frac{n^3}{aa}.$$
$$a + \frac{cc}{a} = \frac{n^4}{a^3}.$$

Poſſit hæc ſeries explicari juxta præcedentium modum ſecundum, & eaſdem adhibendo curvas L X L, M X M, N X N; quarum nimirum proprietas eſt, ut rectâ G K ductâ ad A H utcunque perpendiculari, ſit $GL = \frac{nn}{AG}$; & $GM = \frac{n^3}{AGq}$; & $GN = \frac{n^4}{AG\,cub.}$ Fig. 212.

Nam ſi fiat angulus H A R ſemirectus, & utcunque ducatur G E O ad A H perpendicularis; & ſit G E . c : : c . E O; & per O intra aſymptotos A D, A R deſcribatur *hyperbola* O O; hujuſce cum expoſitis lineis L X L, M X M, N X N interſectiones, radices a reſpectivas determinabunt; ductis utique L G, M G, N G ad A H perpendicularibus, erunt interceptæ A G ipſis a æquales reſpectivè.

Poſſint conſimili modo ſubſequentes omnes æquationes explicari; ſed eas modo duntaxat priore dabimus expoſitas.

Series quinta.

Fig. 213.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{cc}{a} - a = n. \\ cc - aa = nn. \\ cca - a^3 = n^3. \\ ccaa - a^4 = n^4. \end{array}\right\}$$

T *Series.*

Series sexta.

$$\left.\begin{array}{l} a - \frac{cc}{a} = n. \\ aa - cc = nn. \\ a^3 - cca = n^3. \\ a^4 - ccaa = n^4. \end{array}\right\}$$

Fig. 213. Fiat angulus RAI semirectus, & AD ad AI perpendicularis; in qua AC = c; tum utcunque ductâ GZ ad AD parallelâ, sit AG (vel GZ). AC :: AC . ZK, & per K, intra angulum DAR describatur *hyperbola* KYK; tum sint curvæ CLYHLλ, AMYHMμ, ANYHNν, tales, ut inter AG (vel GZ) & GK sit *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ proposito deservient.

Constat hoc, ut in præcedente; & quo pacto radices respectivè determinantur. Verùm adnotetur prætereà.

Not.

1. Curvæ CLH, AMH, ANH ad quintam seriem pertinent; reliquæ HLλ, HMμ, HNν ad sextam.

2. Quoad curvas ad quintam seriem pertinentes; si A$\varphi = \sqrt{\frac{ACq}{2}}$, & ordinetur φY; erit Y communis linearum intersectio, seu *nodus*.

3. In harum primo gradu ordinata AK est infinita, in secundo AC est maxima; in tertio si fuerit AP = $\sqrt{\frac{ACq}{3}}$, & ordinetur PV, erit PV maxima (unde radicum una semper major est quam $\sqrt{\frac{ACq}{3}}$ altera minor) in quarto si AQ = $\sqrt{\frac{ACq}{4}} = \frac{AC}{2}$, & ordinetur QX, erit QX maxima (unde radicum una major erit, altera minor ipsâ $\frac{AC}{2}$).

4. Con-

4. Consequentèr in harum secundo gradu si $n \sqsubset c$; in tertio, si $n^3 \sqsubset cc\sqrt{\frac{cc}{3}} - \frac{cc}{3}\sqrt{\frac{cc}{3}} = \frac{2}{3}cc\sqrt{\frac{cc}{3}}$; vel $n^6 \sqsubset \frac{4}{27}c^6$; in quarto si $n^4 \sqsubset \frac{c^4}{4} - \frac{c^4}{16} = \frac{3}{16}c^4$, nulla radix habetur, unam in istis casibus recta EF curvas supergreditur; nec iis occurrit.

5. Itidem in his omnibus maxima possibilis radix est $AH = AG$.

6. Curva CYH est *Circuli quadrans*, reliquæ AMH, ANH quodammodo κυκλοειδεῖς.

7. Ad sextam seriem pertinentium curva HLL est *hyperbola æquilatera*, cujus axis AH; reliquæ sunt *Hyperboliformes*. Unde quoad hanc seriem liquent cætera.

Series septima.

$$a + b + \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa + ba + cc = nn.$$
$$a^3 + baa + cca = n^3.$$
$$a^4 + ba^3 + ccaa = n^4, \&c.$$

In recta BAH indefinitè protensâ capiatur $AB = b$; & in AD ad BH perpendiculari sit $AC = c$; sint etiam anguli HAR, HBS Semirecti; tum arbitrariè ductâ GY ad AH perpendiculari quæ ipsam BS secet in Y; fiat AG. AC :: AC. YK; & per K intra angulum DVS describatur *hyperbola* KKK; sint demum curvæ CLL, AMM, ANN tales, ut inter AG (vel GZ) & GK sit *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ satisfacient negotio. Nam est $GK = a + b + \frac{cc}{a}$; & $GLq = aa + ba + cc$; & $GM\,cub = a^3 + baa + cca$; & $GNqq = a^4 + ba^3 + ccaa$. Fig. 214.

Not.

1. Secundi gradûs curva CLL est pars *hyperbolæ æquilateræ*, cujus *centrum* O, ipsam AB bisecans; & siquidem $AC \sqsubset AO$, est OH (ad AB perpendicularis, &) $= \sqrt{ACq - AOq}$ ejus *semiaxis*; sin $AC \sqsupset AO$, ejus axis est $OI = \sqrt{AOq - ACq}$. reliquæ verò curvæ AMM, ANN sunt *hyperboliformes*.

2. Hinc

2. Hinc constat in secundo gradu si fuerit $n \sqsupset C$; nullam veram radicem dari; alioquin in omnibus una semper habetur, & unica; quoniam recta E F curvas semel intersecabit, nec pluries.

Series octava.

Fig. 215.

$$\frac{cc}{a} + b - a = n.$$
$$cc + ba - aa = nn.$$
$$cca + baa - a^3 = n^3.$$
$$ccaa + ba^3 - a^4 = n^4, \&c.$$

Series nona.

$$a - b - \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa - ba - cc = nn.$$
$$a^3 - baa - cca = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 - ccaa = n^4, \&c.$$

Fig. 215. In recta A I sumatur A B $= b$; & in A D ad ipsam A I perpendiculari sit A C $= c$; fiant autem anguli I A R, A B S semirecti; ducatúrque recta Z G K ad A I utcunque perpendicularis, ipsam B S secans ad ξ; & sit A G. A C : : A C. ξ K; tum per K intra angulum D S B describatur *hyperbola* KYHK; sint denuo curvæ CLHLλ, AMHMμ, ANHNν tales, ut inter A C, G K sint *media* GL, *bimedia* G M, *trimedia* G N; hæ curvæ proposito satisfacient; constat autem hoc ut in præcedente.

Not.

1. Curvæ C L H, A M H, A N H ad octavam seriem pertinent, reliquæ verò H Lλ, H Mμ, H Nν, ad nonam.

2. Quoad octavam seriem, si bisecetur A B in O, & ordinetur OT ad curvam C L H est O T maxima; sin fiat A P $= \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9}} +$

cc

$\frac{cc}{3}$, ac ordinetur P V ad curvam A M H, erit P V maxima; item si A Q $= \frac{3}{8}b + \sqrt{\frac{9}{64}bb + \frac{cc}{2}}$, & ordinetur Q X ad curvam ANH erit Q X maxima.

3. Hinc, si in secundo harum gradu sit $n \sqsubset \sqrt{cc + \frac{bb}{4}}$; in tertio si (posito fore $f = \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9} + \frac{cc}{3}}$) sit $n^3 \sqsubset ccf + bff - f^3$; in quarto, si (posito fore $g = \frac{3}{8}b + \sqrt{\frac{9}{64}bb + \frac{cc}{2}}$) sit $n^4 \sqsubset ccgg + bg^3 - g^4$; nulla datur radix; nam his suppsi tis, recta E F curvis non occurret, respectivè.

4. Si fuerit A $\varphi = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{16} + \frac{cc}{2}}$, & ordinetur φ Y; erit Y *Nodus* curvarum; unde si $n =$ A φ; erit A φ una radicum in omnibus.

5. Curva C L H est *circumferentia Circuli*, cujus *Centrum* O; reliquæ A M H, A N H sunt *Cycliformes*.

6. Peculiare est in secundo gradu, quòd si $n \sqsupset c$, detur una tantùm radix.

7. In hac radicum maxima (quæ & minima est in nona serie) est A H $= \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} + cc}$.

8. Curva H L λ est *hyperbola æquilatera*, cujus *semiaxis* O H; reliquæ H M u, H N ν sunt *hyperboliformes*; unde patet in serie nona semper unam, & hanc unicam radicem haberi.

Series decima.

Fig. 216.

$a + b - \frac{cc}{a} = n.$

$aa + ba - cc = nn.$

$a^3 + baa - cca = n^3.$

$a^4 + ba^3 - ccaa = n^4$, &c.

Series

Series undecima.

$$\frac{cc}{a} - b - a = n.$$
$$cc - ba - aa = nn.$$
$$cca - baa - a^3 = n^3.$$
$$ccaa - ba^3 - a^4 = n^4, \&c.$$

Fig. 216. In rectâ B A H sumatur B A $= b$; & in A D ad A H perpendiculari sit A C $= c$; sintque anguli H A R, H B S semirecti; tum utcunque ductâ rectâ G K ξ ad A H perpendiculari (quæ ipsam B S secet in ξ; sit A G . A C :: A C . ξ K; & per K intra *asymptotos* V D, V S describatur *hyperbola* KYHK; sint demum curvæ CLHLλ, AMHMμ, ANHNν tales, ut inter A G (vel G Z) & G K sint *media* G L, *bimedia* G M, *trimedia* G N; hæ proposito servient, id quod constat, ut in præcedentibus.

Not.

1. Curvæ H L λ, H M μ, H N ν ad decimam seriem pertinent; reliquæ C L H, A M H, A N H ad undecimam.

2. Curva H L λ est *hyperbola æquilatera*, & curva C L H *circularis circumferentiæ* pars; utriusque commune centrum est O, ipsam AB bisecans (unde $AH = \sqrt{\frac{bb}{4} + cc} : - \frac{b}{2}$)

3. In decima serie radix una semper habetur, & unica; in undecima nunc duæ, nunc una, subinde nulla.

4. $A\phi = \frac{cc}{b}$; & $A\psi = \sqrt{\frac{bb}{16} + \frac{cc}{2}} : - \frac{b}{4}$; & ordinentur φ Y, ψ X; puncta Y, X sunt nodi curvarum.

5. In undecimæ secundo gradu ordinata A C est maxima; sin A P $= \sqrt{\frac{bb}{9} + \frac{cc}{3}} : - \frac{b}{3}$; & à P ad curvam A M H ordinetur P γ, hæc maxima erit; item si A Q $= \sqrt{\frac{9bb}{64} + \frac{cc}{2}} : - \frac{3b}{8}$; & à

Q

Q ad curvam A N H ordinetur Q δ, hæc etiam maxima erit; unde de radicum limitibus fiet judicium; ut in iis, quæ ad seriem octavam sunt adnotata.

Series duodecima.

Fig. 217.

$$a - b + \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa - ba + cc = nn.$$
$$a^3 - baa + cca = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 + ccaa = n^4, \&c.$$

Series decima tertia.

$$b - a - \frac{cc}{a} = n.$$
$$ba - aa - cc = nn.$$
$$baa - a^3 - cca = n^3.$$
$$ba^3 - a^4 - ccaa = n^4, \&c.$$

Pro his, Sit A B = b; & A C = c; & angulus A B S semirectus, & G ξ ad A B utcunque perpendicularis, & A G . A C :: AC. ξ K; & K H K I K *hyperbola asymptotis* S A, S B descripta; denuò curvæ C L H L I L λ, A M H M I M μ, A N H N I N ν tales sint, ut inter AG, G K sit *media* G L, *bimedia* G M, *trimedia* G N. Fig. 217.

Not.

1. Curvæ C L H, A M H, A N H, atque curvæ I L λ, I M μ, I N ν ad seriem duodecimam spectant, verùm intermediæ curvæ H L I, H M I, H N I ad decimam tertiam.

2. Curvæ C L H, I L λ sunt *hyperbolæ æquilateræ*, quarum commune *centrum* O (rectam A B bisecans) & *semiaxis* O H (vel O I) = $\sqrt{}$ A O q. — A C q reliquæ tales sunt, quales figura monstrat.

3. Curvæ

3. Curva HLLI est *semicirculus*; reliquas itidem ostentat Schema.

4. Si $A\zeta = \frac{cc}{b}$, $A\psi = \frac{b}{4} - \sqrt{\frac{bb}{16} - \frac{cc}{2}}$; & $A\phi = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{16} - \frac{cc}{2}}$; ordinentúrque rectæ ζV, ψX, ϕY; erunt puncta V, X, Y *nodi* curvarum (si $b \sqsupset \sqrt{8cc}$, deerunt *nodi* X, Y; si $b = \sqrt{8cc}$; ii coalescent).

5. Ordinatarum ad curvam CLH *maxima* est ipsa AC; sin $AP = \frac{b}{3} - \sqrt{\frac{bb}{9} - \frac{cc}{3}}$, & ordinetur $P\gamma$ ad curvam AMH; erit $P\gamma$ *maxima*; item si $AQ = \frac{3}{8}b - \sqrt{\frac{9}{64}bb - \frac{cc}{2}}$; & ordinetur $Q\delta$ ad curvam ANH, erit $Q\delta$ *maxima*.

6. Ordinatarum ad curvam HLLI *maxima* est ipsa OT; sin $AP = \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9} - \frac{cc}{3}}$, & ad curvam HMI ordinetur pg, erit pg *maxima*; item si $Aq = \frac{3}{8}b + \sqrt{\frac{9}{64}bb - \frac{cc}{2}}$; & ordinetur qd ad curvam HNI, erit qd *maxima*.

7. Hinc radicum limites dignoscentur, ut innuitur in iis, quæ ad octavam seriem animadversa sunt.

8. Patet in Serie duodecima nunc tres, modo duas, semper unam radicem haberi; in decima tertia verò subinde duas, aliquando tantùm unam, interdum nullam haberi.

9. Et hæc quidem constant posito fore $\frac{b}{2} \sqsubset c$; at si $\frac{b}{2} = c$; evanescet Series decima tertia; coalescent puncta H, O, I; recta AB *hyperbolam* KKK tanget; curvæque CLH, ILλ in rectas lineas degenerabunt.

10. Sin $\frac{b}{2} \sqsupset c$; etiam evanescit Series decima tertia; *hyperbola* KKK tota infra rectam AB jacente; quo casu curva CLL erit hyperbola æquilatera, habens centrum O, semiaxem (ipsi AB perpendicularem) $OT = \sqrt{ACq - AOq}$; tunc & curvæ AMM, ANN
Fig. 218. ad infinitum procurrent, sic ut æquationes, quæ in Serie duodecima, unam semper, & unicam radicem obtineant. Hæc suffecerit insinuâsse; quin & rem totam hactenus particulatim attigisse. Subnectemus autèm notas quasdam magìs generales.

In

In *præmissas explicationes* animadvertatur generatim.

1. Propositam quamvis æquationem explicans *curva* designatur hoc modo: proponatur, exempli causâ, *æquatio* $a^5 + ba^4 + cca^3 - d^3aa - f^4a = n^5$; In rectâ indefinitè protensâ HI designetur punctum A, pro radicum termino, vel origine; tum arbitrariè sumptâ AG pro indeterminatâ radice a; fiat GK æqualis primo seriei propositam æquationem continentis gradu; nempe sit hic $GK = a + b + \frac{cc}{a} - \frac{d^3}{aa} - \frac{f^4}{a^3}$ (utique rationem a ad c semel continuando fit $\frac{cc}{a}$; rationem a ad d bis continuando fit $\frac{d^3}{aa}$; ac ità porrò) tum inter AG, GK tot mediarum proportionalium, quot æquationis propositæ gradus exigit (is autem à pura quæsitæ radicis poteſtate indicatur) in hoc nempe casu quatuor mediarum proportionalium prima sit GO; per ejusmodi puncta O traducta curva AOO proposito deserviet. Fig. 219.

2. De radicibus falsis, seu negativis nihil attigimus suprà; cæterùm eæ reperiuntur hoc modo. Æquationi propositæ subrogetur altera, cujus in locis paribus (etiam vacuos locos adnumerando) signa sunt illis contraria, quæ habet æquatio proposita; erunt hujusce *subdititiæ æquationis* radices veræ, seu positivæ ipsius propositæ æquationis radices falsæ, seu negativæ. *Exemplo* sit *æquatio* $a^3 + baa = n^3$; vel $a^3 + baa * - n^3 = 0$. Subrogetur $a^3 - baa * + n^3 = 0$; & hujus, † uti supra edoctum, veræ radices designentur, hæ *propositæ æquationis* falsæ erunt. Rursus sit $a^3 - baa = n^3$; vel $a^3 - baa - n^3 = 0$; substituatur æquatio $a^3 + baa + n^3 = 0$; hæc nullam veram radicem obtinet; ergo nec *æquatio proposita* falsam admittit. † *In Serie* 3.

3. Quinimò datâ verâ radice quâpiam, depressioris gradûs æquatio quædam falsis reperiendis inserviet, qualis ita determinatur. Proponatur æquatio quævis, puta $a^3 + baa = n^3$, cujus nota sit radix una, quæ vocetur f. Construatur æquatio planè similis propositæ, easdemque *coefficientes* habens, tantum pro a substituendo f; nempe $f^3 + bff = n^3$. ergo $a^3 + baa = n^3 = f^3 + bff$; adeóque $a^3 + baa - f^3 - bff = 0$. dividatur hæc æquatio (id quod semper fieri poteſt) per $a - f$; proveniet $aa \begin{matrix} + ba + bf \\ + fa + ff \end{matrix} = 0$; cujus æquationes eædem erunt cum reliquis æquationis propositæ radicibus; quæ proinde duas colligitur radices falsas habere; itaque mutatis locorum parium signis, ut ità fiat $aa \begin{matrix} - ba + bf \\ - fa + ff \end{matrix} = 0$; hujus æquationis

veræ radices propositæ falsas exhibent. Hic insuper modus æquationis propositæ, quatenus illa ex aliarum in se ductu provenit, constitutionem ostendit.

4. Radices maximæ & minimæ deprehenduntur in quacunque serie ponendo (quovis in gradu seriei) fore $n = o$; ut in octava serie sit $ba - aa + cc = o$; adeóque $cc = aa - ba$, erit $a\ (= \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} + cc})$ *maxima radix*; item in Serie duodecima sit $aa - ba + cc = o$; unde $cc = ba - aa$; erit $a\ (= \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - cc})$ *radix maxima*; & $a\ (= \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - cc})$ *radix minima*.

5. *Curvarum nodi*, vel *intersectiones* innotescunt, cujusvis in Seriei quovis gradu, ponendo fore $a = n$; ut in octava Serie, ubi $ba - aa + cc = nn$, sit $a = n$; ergò $ba - aa + cc = aa$; vel $cc = 2aa - ba$; vel $\frac{cc}{2} = aa - \frac{ba}{2}$; quare $a = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{16} + \frac{cc}{2}}$. Item in Serie duodecima, ubi $aa - ba + cc = nn = aa$; erit ideò $cc = ba$; ac inde $a = \frac{cc}{b}$.

6. *Ordinata maxima, minimaque* variis nodis, methodísque passim notis investigantur; ego simul illas atque curvarum *tangentes* unà operâ sic determino. Sit curva A γ H, ad Seriem undecimam pertinens, ejúsque gradum, cujus æquatio est $cca - baa - a^3 = n^3$;
Fig. 220. posito γ T curvam tangere, & γ P ad A H ordinari, reperio (de supra monstratis) fore $PT = \frac{3n^3}{3aa + 2ba - cc}$, tum considero, si ordinata P γ sit maxima, fore tangentem ipsi H A parallelam, seu rectam P T esse infinitam; quare cùm sit $n^3 = PT \times : 3aa + 2ba - cc$; & n sit finita, patet esse $3aa + 2ba - cc = o$; vel $aa + \frac{2}{3}ba = \frac{cc}{3}$; adeóque $\sqrt{: \frac{bb}{9} + \frac{cc}{3} :} - \frac{b}{3} = a = AP$.

7. Adnoto demùm è *maximis* & *minimis ordinatis* radicum limites derivari; nempe si reperiatur ad maximam ordinatam pertinentis radicis (velut ipsius A P in exemplo proximè superiori) valor, & is ubique in æquatione pro ipsâ a substituatur, si quod provenit, deficiat ab *homogeneo* (quod vocant) *comparationis*, *problema* construi nequit

nequit, aut ſaltem radicibus aliquot caret, quas æquationis gradus & ſpecies præ ſe ferunt. Eadem *minimarum* eſt ratio; tantùm ibi proveniens *ſumma* debet *homogeneum* illud excedere, quò radix aliqua, vel omnes habeantur. *Exempla* comparent in præmiſſis. Hîc itaque ſubſiſto.

Laus DEO Optimo Maximo.

FINIS.

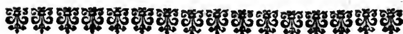
ERRATA.

PAg.. 5. *Lin.* 20. ad testatur , *lege* testatam facit. *p.* 9. *l.* 3. *leg.* velocitatum. *p.* 14. *l.* 36. *leg.* plana. *p.* 17. *l.* 24. *leg.* prohibetur. *p.* 18. *l.* 32. *leg* à puncto B. *p.* 19. *l.* 4. *leg.* B D, G K. *p.* 22. 10. *leg.* VD multitudo censeri. *p.* 23. *l.* 7. *leg.* radius ad *p.* 23. *l.* 10. *leg.* nec non, datis. *p.* 24. *l.* 2. *leg.* effectæ. *p.* 24. *l.* 24. *leg.* quidem ut punctum. *p.* 30. *l.* 18. *leg.* protracta. *p.* 32. *l.* 5, 6. *leg.* tangentes (una — hujus) *p.* 35. *l.* 5. *leg.* tangant. *p.* 35 *l.* 6. *leg.* M P. *p.* 35. *l.* 12. *leg.* T P. *p.* 37. *l.* 2. *leg.* divisâ. *p.* 40. *l.* 4. *leg* arcus N H major est ipsâ. *p.* 41. *l.* 32. *leg.* versari. *p* 43. *l.* 15. *leg.* aliam H R. *p.* 47. *l.* 26. Fig 39, & 40. *pag.* 49. *l.* 16. *leg.* 2 *f x y*. *p.* 52. *l.* 3. *dele* Fig. 51, 52. *p.* 52. *l.* 6. *leg.* Fig. 51, 52. *pag.* 52 *l.* 24. *leg.* Fig. 53. *p.* 55. *l.* 15. *dele* se intersecantes in X. *p.* 57. *l.* 25. *leg.* δ P. *p.* 58. *l.* 19. *leg.* F B F ipsi K E K. *p.* 59. *l.* 2. *leg.* K E K. *p.* 61. *l.* 26. *leg.* punctum. *p.* 62 *l.* 27. *leg.* K O ⊏ K A. *p.* 63. *l.* 16. *leg.* contactum. *p.* 64. *l.* 22. *leg.* Fig. 80. *p.* 65. *l.* 4. *leg.* στωολεχίαν. *p.* 67. *l.* 11. *leg* tum alia. *p.* 67. *l.* 35. *leg,* Q O q = Z q. *p.* 68. *l.* 7. *leg.* F Q. *p.* 70. *l.* 22. *leg.* Fig. 95. *p.* 76. *l.* 3. *leg.* H T (*a*) ⊏ G A. *p.* 76. *l.* 11. *leg.* D F. *p.* 76. *l.* 18. *leg.* P K. *p.* 76 *l.* 20. *leg.* tanget recta RFK. *p.* 78. *l.* 24. *leg.* infra. *p* 79. *l.* 18. *dele* Fig. 113. *p.* 79. *l.* 31. *leg.* Fig. 113. *p.* 86. *l.* 31. *leg.* $\sqrt{}$ V C Z φ = C G. *p.* 87 *l.* 14. *leg.* D ψ³ = $\sqrt{\frac{12}{243}}$. *pag.* 91. *l.* 9. *leg.* in recta. *p.* 91. *l.* 23. *leg.* æquale rectangulo ex. *p.* 91. *l.* 24. *leg.* P, Q. *p.* 96. *l.* 15. *leg.* C A. C D. *p.* 96. *l.* 22. *leg.* A D = $\frac{5}{8}$ C A. *p.* 97. *l.* 2. *leg.* totam. *p.* 102. *l.* 25. *leg.* O P ad O T. *pag.* 106. *l.* 10. *leg.* applicatis, *p.* 106. *l.* 19. *leg.* semi-axis. *p.* 112. *l.* 2. *leg.* applicatis. *p.* 114. *l.* 22. *leg.* $\frac{PLQO}{2\ Rad.}$ *p.* 114. *l.* 26. *leg.* propositum. *p.* 116. *l.* 5. *leg.* R. S. *p.* 122. *l.* 22. *leg.* Fig. 183. *p.* 123. *l.* 1. *leg.* Fig. 184 *p.* 125. *l.* 4. *leg.* D M = D I. *p.* 128. *l.* 7. *leg.* Fig. 195. *p.* 128. *l.* 11. *dele* Fig. 195. *p.* 128. *l.* 23 $\frac{PM}{\sqrt{APM}}$ *p.* 129. *l.* 13. emerget undecima Lect. *p.* 136. *l.* 20. *leg.* hyperbolæ. *pag.* 139. *l.* 3. *leg.* nam. *p.* 140. *l.* 1. *leg.* n — 2 c. à *p.* 105. ad *p.* 112. *l.* 1. *leg.* Lect. XII.]



UBi (*pag.* 100) de Centro gravitatis parabolæ & paraboliformis verba fiunt, intelligantur non curvæ lineæ, ſed iis comprehenſa ſpatia, de quibus apparet iſthic agi.

Sicubi ponitur $\frac{\delta}{\pi}$, nec adponitur ἔνδειξις ulla, deſignantur termini rationem exprimentes, quam habet circuli diameter ad ejus circumferentiam.



Addenda Lectionibus Geometricis.

Vacuæ Pagellæ explendæ hæc adjici possunt: ὑστεραδικῶ vice, animadverto potuisse secundo Appendiculæ tertiæ Lectionis XII Problemati, pag. 122. Corollaria quædam adponi non injucunda, qualium adscribam unum & alterum.

Probl. I.

DEtur linea quæpiam AMB (cujus axis AD, basis DB) curva ANE designetur talis, ut ductâ liberè rectâ MNG ad BD parallelâ, quæ ipsam ANE secet in N, sit curva AN æqualis ipsi GM. Fig. 221.

Curva ANE talis sit ut si MT curvam AMB, & NS curvam ANE tangant, sit SG.GN :: TG.$\sqrt{GMq - TGq}$, ipsa ANE Proposito faciet satis.

Probl. II.

Iisdem quoad cætera Suppositis, & constitutis; curva ANE jam talis esse debeat, ut curva AN semper æquetur interceptæ rectæ NM.

Curva ANE jam talis sit, ut sit SG.GN :: 2TG × GM. GMq — TGq; erit ANE curva quæ desideratur.

Probl. III.

Datur curva quæpiam DXX, cujus axis DA; reperiatur curva AMB proprietate talis, ut si liberè ducatur recta GXM ad ipsam AD perpendicularis, ponaturque SMT curvam AM tangere, sit MS æqualis ipsi GX. Fig. 222.

Liquet rationem TG ad TM (hoc est rationem GD ad MS, vel GX) dari; adeoque rationem TG ad GM quoque dari.

Inservit hoc superficiebus designandis, quarum in promptu sit dimensio, etenim (ductâ ME ad AD parallelâ) Superficies Solidi ex plani BME circa axem DB rotatu progeniti adæquat $\frac{\text{Periph}}{\text{Rad}} \times GDX$; ut habetur in 11ª Lectionis XII.

In Lect. XI. appendice, numero XXXIII. de Cycloide profertur Theorema quoddam, id quod ex hujusmodi generaliori Theoremate deduci potuisset.

Fig. 223. Sit AMB curva quælibet, cujus Axis AD, basis DB, sit item curva ANE talis, ut si arbitrariè ducatur PMN ad DBE parallela, positoque rectam TN curvam ANE tangere, sit TN parallela subtensæ AM; completo Rectangulo ADEG erit Spatium trilineum AEG æquale Segmento ADB.

Huic suppar Theorema tale est: Iisdem positis, si tam Segmentum ADB, quam Spatium AEG circa Axem AG convertantur; erit productum è Segmento ADB Solidum producti ex AEG duplum.

E tangentium porrò contemplatione suborta est methodus, per quam expeditissimè plurima circa maximas quantitates Theoremata deducuntur; quæ certè si tempestivè se objecissent, digna censuissem quæ Lectionibus insererentur, ex iis indigitabo nonnulla.

Fig. 224. Sit curva quæpiam ALB, cujus Axis AD, basis DB; & huic parallelæ LG, $\lambda\gamma$; item LT curvam tangat.

Theor. I.

Sit m numerus quicunque, potestates exponens; si ponatur $DG^{m-1} \times TG = GL^{m}$, erit $DG^{m} + GL^{m}$ maximum, seu majus quam $D\gamma^{m} + \gamma\lambda^{m}$.

Theor. II.

Itidem sumpto numero m, si ponatur $BL^{m-1} \times TL = GL^{m}$; erit $GL^{m} + BL^{m}$ maximum seu majus quam $\gamma\lambda^{m} + B\lambda^{m}$.

Theor. III.

Sint numeri quilibet m, n; si ponatur $m \times TG = n \times DG$, erit $DG^{m} \times GL^{n}$ maximum, seu majus quam $D\gamma^{m} \times \gamma\lambda^{n}$.

Theor.

Theor. IV.

Quod si ponatur $m \times TL = n \times \text{arc}\,BL$, erit $GL^{\overline{n}} \times BL^{\overline{m}}$ maximum, seu majus quàm $\gamma\lambda^{\overline{n}} \times B\lambda^{\overline{m}}$.

Theor. V.

Si fuerit $TG \times GL = DGLB$, erit $DGLB \times GL$ maximum, seu majus quàm $D\gamma\lambda B \times \gamma\lambda$.

Theor. VI.

Sin $TG \times GL = 2\,DGLB$, erit $GL \times \sqrt{DGLB}$ maximum, seu majus quàm $\gamma\lambda \times \sqrt{D\gamma\lambda B}$.

Haud difficili negotio, cum hæc demonstrantur, tum ejusmodi complura deprehenduntur.

Ad illa verò succinctius comprobanda deservire possunt hujusmodi Theoremata.

Sint duæ curvæ AGB, DHC quarum communis axis AD, sed ordinatæ inverso situ increscant ab A ad DB, decrescant à D ad AC; ad ordinatæ verò communis GEH terminos, recta GS curvam AGB, & recta HT curvam DHC contingant. Fig. 225.

I. Si recta HT rectæ GS parallela sit, erit GEH maxima ordinatarum in continuum jacentium summa.

Nam utcunque ducta OKFLP ad GEH parallela (quæ Lineas secet ut cernis) erit $GH = QP \sqsubset KL$.

Not. Verum hoc, si curvarum partes concavæ axi obversæ jaceant, aliàs GEH erit minima.

II. Si $ES = ET$, erit rectangulum ex EG, EH maximum: Nam ob $SE.SF :: EG.FO$, & $TE.TF :: EH.FP$; erit $SE \times TE . SF \times TF :: EG \times EH . FO \times FP$, itaque cum sit $SE \times TE \sqsubset SF \times TF$, erit $EG \times EH \sqsubset FO \times FP$.

FINIS.


NAZIONALE

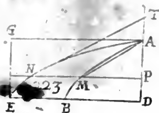


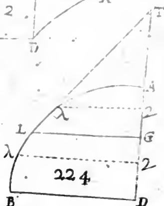


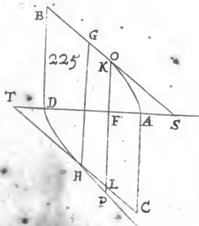





D
221
G
N
M
A
S
T
T
X
M
G
X
222
S
B
E
D


T
G
A
N
P
223
M
E
B
D


T
λ
L
G
λ
224
B
D


B
G
O
225
K
T
D
F
A
S
H
L
P
C